モンテカルロ法を用いた投票力指数の計算

松井 知己
東京工業大学 工学院 経営工学系

重みつき多数決ゲームは, 投票者がそれぞれ何票かの票を持ち, その多数決によって決定が行なわれるゲームである. 投票者の集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ と表し, 投票者 i の持つ票数を正整数 w_i としたとき, 正整数の列 $G = [q; w_1, w_2, \ldots, w_n]$ で重みつき多数決ゲームを表す. ただし q は勝つために必要な票数であり, $0 < q \leq \sum_{i=1}^{n} w_i$ を満たしているとする. 投票者集合 N の任意の部分集合を提携と呼ぶ. ある提携 S が, $\sum_{i \in S} w_i \geq q$ を満たす時, S は勝利提携であると呼び, 勝利提携でない提携を敗北提携と呼ぶ. 勝利提携の集合を用いて投票者の影響力を捉える投票力指数がいくつか提案されている. 本研究では, 投票力指数として提案されている Shapley-Shubik 指数（S-S 指数）について議論する. 投票者のある順列 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ に対し, 提携 $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}\}$ が敗北提携であり, 提携 $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_i\}$ が勝利提携のとき, 投票者 σ_i は順列 σ におけるピヴォットと呼ぶ. すべての順列が等確率で起こると仮定したときの, 各投票者のピヴォットとなる期待値を, 各投票者の Shapley-Shubik 指数（S-S 指数）と呼ぶ. 投票者 i の S-S 指数を φ_i と表す.

Mann and Shapley (1962) は, 投票者の順列をランダムに生成し, 各投票者について, ピヴォットとなった回数を生成した順列数で割った値を出力する, という単純なモンテカルロ法を提案した. Bachrach et al. (2010) は, この解法で得られる出力に対し考察を行っている.

本研究では, 投票者の順列を, ピヴォットとなる投票者に従って同値類に分割し, 同値類間に単射を導入することで, 複数の順列をまとめて扱うモンテカルロ法を提案する. 提案する手法で得られる出力を表わす確率変数ベクトルを $(\varphi_1^{\mathrm{A2}}, \varphi_2^{\mathrm{A2}}, \ldots, \varphi_n^{\mathrm{A2}})$ と書く. このとき, 上記の単純なモンテカルロ法では成り立たない, 下記の性質が成り立つ.

定理 1. 任意の投票者対 $\{i, j\} \subseteq N$ に対し, $[\varphi_i > \varphi_j$ ならば $\varphi_i^{\mathrm{A2}} \geq \varphi_j^{\mathrm{A2}}]$ が成り立つ.

また, 提案手法で生成する順列の数 M に対し, 得られる出力は以下の性質を満たす.

定理 2. 任意の正実数の対 $\varepsilon > 0$ と $0 < \delta < 1$ に対し, 以下が成り立つ.

1. 投票者は票数の多い順に整列されている, すなわち $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$ が成り立っているとしたとき, 任意の投票者 $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し, 次の性質が成り立つ. 生成順列数が $M \geq \dfrac{\ln 2 + \ln(1/\delta)}{2\varepsilon^2 i^2}$ を満たすならば, $\Pr\left[\left|\varphi_i^{\mathrm{A2}} - \varphi_i\right| < \varepsilon\right] \geq 1 - \delta.$ が成り立つ.

2. 生成順列数が $M \geq \dfrac{\ln 2 + \ln(1/\delta)}{2\varepsilon^2}$ を満たすならば, $\Pr\left[\forall i \in N, \left|\varphi_i^{\mathrm{A2}} - \varphi_i\right| < \varepsilon\right] \geq 1 - 2\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{i^2}$ が成り立つ.

3. 生成順列数が $M \geq \dfrac{|N^*| \ln 2 + \ln(1/\delta)}{2\varepsilon^2}$ を満たすならば, $\Pr\left[\frac{1}{2}\sum_{i \in N} \left|\varphi_i^{\mathrm{A2}} - \varphi_i\right| < \varepsilon\right] \geq 1 - \delta$, が成り立つ, ただしここで $N^* = \{i \in N \setminus \{n\} \mid \varphi_i > \varphi_{i+1}\} \cup \{n\}$, である.

本発表は潮田優斗 (東京工業大学) との共同研究に基づいている.