p 次錐の非等質性と非自己双対性

伊藤 勝
日本大学 理工学部 数学科

$p \in [1,\infty]$ に対して, p ノルム $\|\cdot\|_p$ のエピグラフを p 次錐と呼び, $K_p^{n+1} = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid t \geq \|x\|_p\}$ と書く. p 次錐は二次錐を含む基本的な凸錐のクラスである. 二次錐はユークリッドノルムから導出され, 対称錐であるといった最適化手法の開発にも有用な性質をもつ一方で, それ以外の p 次錐について分かっている幾何的性質は二次錐に比べて限定的である. p 次錐に基づく錐最適化問題は, 配置問題などに現れ, アルゴリズムの開発も議論されており, 最適化にも密接に関わる幾何的性質の解明は有意義であろう. 本講演ではとくに, 二次錐以外の p 次錐が等質錐でないことおよび自己双対錐でないことを示す.

凸錐 $K \subset \mathbb{R}^n$ の自己同型群を $\mathrm{Aut}(K) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid AK = K\}$ と書くとき, K が等質であるとは, 任意の $x, y \in \operatorname{int} K$ についてある $A \in \mathrm{Aut}(K)$ が存在して $Ax = y$ となることをいう. また K が自己双対であるとは, ある $\mathbb{R}^n$ の内積に対する K の双対錐が K と一致することをいう. 等質かつ自己双対である凸錐を対称錐という.

p 次錐のうちで二次錐はとくに対称錐のひとつとして知られるが, それ以外の p 次錐が等質であるかまたは自己双対であるかについては $p \in \{1,\infty\}$ の場合しか知られていなかった. Gowda と Trott は 2014 年に $p \in \{1,\infty\}$ に対して p 次錐の自己同型群を決定および非等質性を証明した. その際, 彼らは同様の事実がそれ以外の $p \notin \{1,2,\infty\}$ に対しても成り立つかどうかという問題を提示している. 本講演ではこの問題に対するふたつのアプローチを述べる. ひとつは T-代数を用いるものであり, もうひとつは微分幾何学的な手法である.

T-代数は等質錐と一対一の対応を与える代数構造である. 狭義凸な等質錐 $K \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ が階数 2 の T-代数から導出されることを議論し, 次の結果を示す.

定理. 狭義凸な等質錐は $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ または二次錐 K_2^{n+1} のいずれかと同型である.

$p \notin \{1,2,\infty\}$ に対して, 狭義凸錐である p 次錐についてこの結果を用いて, p 次錐の非等質性を示す.

微分幾何学的な手法による p 次錐の解析については, p 次錐の境界の振る舞いを解析して自己同型群や自己双対性を調べる. p 次錐の境界から原点を除いた集合 M_p は可微分多様体となる. 各点についてその周りで局所的な部分多様体を考え, M_p への埋め込みの微分可能性を調べると, 自己同型群の構造がわかる.

定理. $p \neq 2$, $n \geq 2$ に対して, $\mathrm{Aut}(K_p^{n+1}) = \{\alpha \operatorname{diag}(1, \sigma_1, \ldots, \sigma_n) P : \alpha > 0,\ \sigma_i \in \{-1, 1\},\ P$ は $P_{11} = 1$ である置換行列 $\}$.

この結果, 二次錐以外の p 次錐が等質でないことがわかり, 同じ議論を用いて, 二次錐以外の p 次錐の非自己双対性も導かれる.