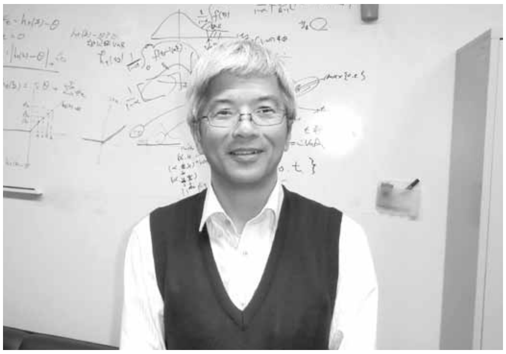
In Laboratory Now

研究室訪問 4

迷えるあなたを導く最適化

水野 眞治 研究室～経営工学専攻



水野 眞治 教授

モノ・カネ・ヒト・情報……。現代社会は多くのものが錯綜している時代と言える。その中で、企業や政府などの社会組織はそれらを運用して上手く利益を得る必要があるが、それは簡単ではない。特に大きな組織だといろいろな事業を運用する必要があるので、どの事業にどれだけ力を入れれば利益が大きくなるかが非常にわかりにくい。

この問題を解決するための良い手法として、最適化と呼ばれるものがある。今回はその最適化について長年研究している水野研究室を訪ね、お話を伺った。

最適化とは？

人は何らかの形で自分にとって好ましいもの、すなわち利益を得るための行動を心がける。そのために、人は多くの選択肢からより大きな利益をもたらすものを選ぼうとする。しかし、行動の選択肢が多い場合、どの選択肢をとれば良いのかが分かりにくい。そこで、より良い選択肢を見つけるための手法が必要となる。この手法のことを最適化という。

最適化が用いられている具体的な例として、企業が挙げられる。企業は限られた資金や人材の範囲でできるだけ大きな利益を出そうとする。そのために仕事や資金を部署ごとに人材に応じて割り振る。このとき、利益が最大になるような仕事の割り振り方を考えるために最適化が有用である。

他にはCTスキャンの技術にも最適化は用いられている。CTスキャンで人体の内部を撮影するにあたって放射線を人体に照射する必要がある。その放射線が強すぎると人体に悪影響を及ぼし、弱すぎると鮮明な画像を写せない。そのため適切な放射線の強さを見つける必要があり、このときに最適化が用いられる。最適化は金銭などの数字として捉えやすい形の利益を求める場面以外にも用いられるのだ。

では実際に最適化を行う必要があるさまざまな問題に対してどうすれば最適化を行うことができるのか説明しよう。まず、現実の問題を客観的に捉えるために数学の問題に置き換える必要がある。この処理はモデル化と呼ばれる。そして、モデル化した問題を解いて適切な解を求める。

ここで、モデル化を簡単な具体例を出して説明しよう。現実の問題の例として以下のような条件で商品を製造する場合を考える。

問題

商品Aを一個作るのに原料a,bがそれぞれ3g,1g、Bを一個作るのに原料a,bがそれぞれ1g,2g必要である。原料a,bの在庫はそれぞれ9g,8gある。商品A,Bを一個売却するとそれぞれ3円,2円の利益が出る。

このとき商品A,Bをそれぞれいくつ作れば利益が最大になるか。

ここで、商品Aをx個、商品Bをy個作ったとすると、原料aの使用量は$(3x+y)$ g、原料bの使用量は$(x+2y)$ g、そして商品を売却したときの利

益が $(3x+2y)$ 円となる。ここで、原料aの使用量を9g以下、原料bの使用量を8g以下に抑える必要があるので、上の問題は次のような数学の問題に置き換えられる。

問題

$$\begin{cases} 3x+y\leq 9 & \cdots(1) \\ x+2y\leq 8 & \cdots(2) \\ x\geq 0\ ,y\geq 0 & \cdots(3) \end{cases}$$

これらの条件を満たす整数 x,y の組で
$f(x,y)=3x+2y$ を最大にするものを求めよ。

ここで、(1)～(3) のような、x,y が満たさなければならない条件を制約条件といい、最大にしたい関数 $f(x,y)$ を目的関数という。(1)～(3) の制約条件を満たす中で目的関数を最大にする x,y の組を求めればよい。このような x,y の組を最適解という。この問題の場合、最適解は $x=2\ ,y=3$ であることが容易に求まり、このとき $f(x,y)=12$ となる。この最適解をモデル化前の問題に当てはめると、商品Aを2個、商品Bを3個作ることによって利益12円を得ることができ、これが最大の利益であると分かる。

この場合は、元の問題が簡単なのでモデル化が容易であり、またモデルを解くことによって元の問題の最適解が求まる。しかし、現実にはモデル化が難しい問題がたくさんあるので、それに対しては問題を簡略化してモデル化を行い、そのモデルを解くという手法を用いる。

しかし、問題をモデル化したからといってすぐに最適化ができるわけではない。現実に存在する問題をモデル化すると、数百万もの変数を扱う問題になり、コンピュータを使っても簡単には計算できない程に計算量が大きくなってしまう。

そこで、要領良く計算をする方法を考える必要がある。この方法を総じてアルゴリズムと呼ぶ。最適化の分野で主に研究されていることは、効率の良いアルゴリズムを考えることである。与えられたモデルによってどのようなアルゴリズムが効率が良いかは異なるので、モデルをいくつかのカテゴリに分けて、それぞれのカテゴリに対して効率の良いアルゴリズムを考える必要がある。

モデルは制約条件や目的関数の形などによっていくつかのカテゴリに分けられる。目的関数や制約条件の形には一次式・二次式・三角関数や対数関数などさまざまなものがある。その中で目的関数と制約条件が全て一次式であるものを線形計画問題、一次式でないものを含むものを非線形計画問題と呼ぶ。線形計画問題は非線形計画問題と比べて問題が扱いやすく、現実問題のモデルとしてよく使われるので古くから研究されている。水野先生は主に線形計画問題について研究している。

線形計画問題とは？

先生の研究内容を紹介するにあたって、線形計画問題のもつ性質について説明しよう。最適化問題において、全ての制約条件を満たす領域を制約領域という。線形計画問題においてこの制約領域は変数が二つのときは多角形、三つのときは多面体である(**図1**)。この制約領域に相当する多角形・多面体の頂点は、制約領域の中で最も多くの制約条件を等号で満たす点と言い換えることもできる。変数が四つ以上の場合もこのような条件を満たす点を制約領域の頂点という。

線形計画問題がもつ性質とは、この制約領域の頂点に最適解が存在するというものである。この性質を活かして、各頂点での目的関数の値をしらみ潰しに調べることによって最適解を見つけることができる。しかし、それでは頂点の数が膨大な

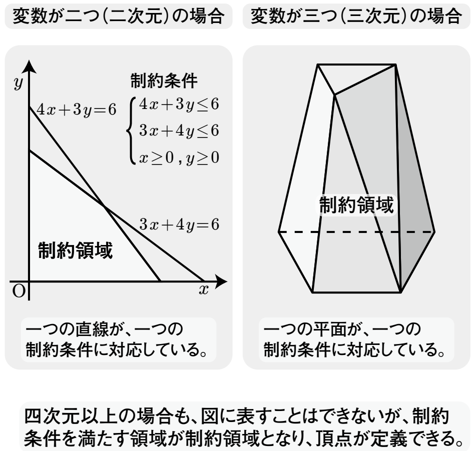


図1　制約領域の形状

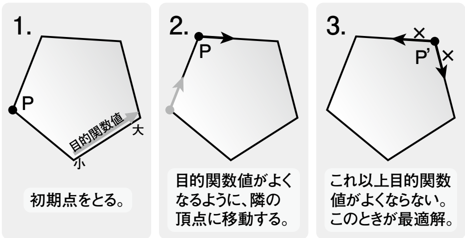


図２　単体法の仕組み

ときに調べるのに時間がかかりすぎてしまい、良い方法とは言えない。よって、頂点の数が多くても少ない時間で最適解を調べられるような効率の良い方法が必要となるのだ。そのような方法の一つとして単体法というものがある。

単体法では、まず制約領域の頂点のどれかに動点Ｐをとる（**図２**）。次に、Ｐの隣の頂点の中で、Ｐよりも目的関数値がよりよいものを一つとってそこにＰを移す。これを繰りかえすと最終的にＰを隣の頂点に移して目的関数値をよくすることができなくなる。このとき、Ｐが到達した頂点をP'とすると、P'が最適解となる。

このことは目的関数が一次式であるという性質を用いると分かる。P'からP'の周りの頂点に向かう辺を辿っていくと目的関数値が最適値から遠ざかる。そして、P'から制約領域内の任意の点へのベクトルはP'からP'の周りの頂点に向かうベクトルを拡大・縮小したものを足しあわせたベクトルで表される（**図３**）。よってP'から制約領域内のどの点に向かっていっても目的関数が最適値から遠ざかるので、P'が最適解なのである。

単体法は線形計画問題の有効な解法として初めて提案されたものであり、また提案されてからしばらくの間最も有効な解法として広く使われていたが、欠点もあった。それは単体法を用いたときに計算時間がかかり過ぎるような問題が存在するということだ。その例として、単体法を適用すると動点Ｐを移していく過程で制約領域のすべての頂点を通ってしまうような線形計画問題がある。変数の数が増えると頂点の数は爆発的に増えるので、変数が多い問題ですべての頂点を回ってしまうと膨大な時間がかかってしまう。このように、単体法はすべての線形計画問題に対して有効な方法とは言えない。よって、どのような問題でも時間をかけ過ぎず解けるような解法が必要となった。そこで考え出されたのが内点法である。

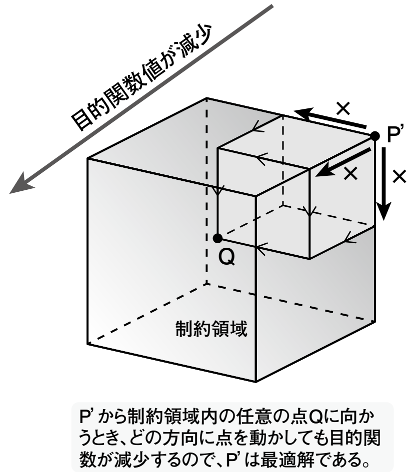


図３　最適解の妥当性

制約領域の頂点を通る単体法とは違って、内点法はその名の通り、最適解に到達する過程で制約領域の内部を通るという方法である（**図４**）。具体的にはまず制約領域の内部の適当な点に動点Ｐをとり、その後は目的関数値がより最適値に近づくようにＰを移していくという過程を繰り返す。内点法を使うと最適解に到達するまでの動点の移動回数が頂点の数によらない。多次元の線形計画問題は頂点の数がとても多いことを考えると、内点法は特に多次元の問題に有効であると言える。内点法は単体法と比べて常に効率よく問題を解けるわけではないが、規模の大きい問題を解くのに適しているという大きな利点があるので、研究者の間で積極的に研究されるようになった。

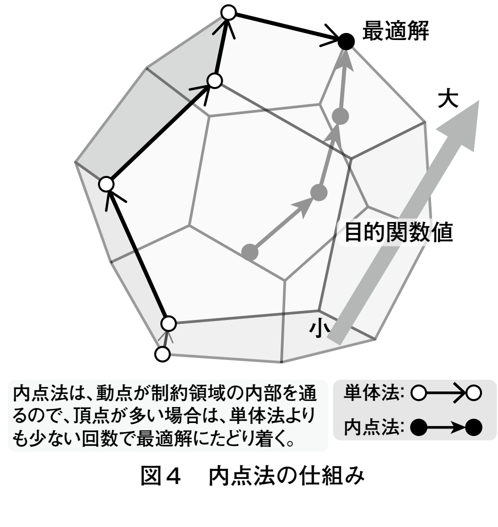


図４　内点法の仕組み

新しい解法、現る！

内点法を使ったときにかかる総計算時間は動点の移動回数と一回あたりの計算時間に依存する。よって、内点法を効率化するには最適解に到達するまでの経路を改善して動点の移動回数を減らす必要がある。これについて説明しよう。ジグザグの経路をとってしまうと、途中で寄らなければいけない点が増えてしまうので、移動回数が多くなる。よって､起伏の少ない経路をとる必要がある。このような起伏の少ない経路として、中心パスというものが知られている。中心パスをどのように作るのか説明しよう(**図５**)。制約領域の中心に位置する点として、解析的中心と呼ばれるものを定義する。解析的中心は、目的関数値が一定の平面を一つとるとその上に一点のみ存在している。目的関数が最適値に向かう経路で、解析的中心のみを通るものを中心パスという。

先生は中心パスを利用した解法として主双対内点法と呼ばれるものを開発した。主双対内点法について説明しよう。その前に主双対内点法を理解するのに重要な概念である、双対問題について説明する。

最初に与えられた線形計画問題を主問題と呼ぶことにする。そして主問題の目的関数・制約条件をある条件にそって作り変え、新たな線形計画問題を作る。これを双対問題と呼ぶ。主問題が目的関数を最大化する問題だとすると双対問題は目的関数を最小化する問題になる。双対問題は主問題と最適解が等しいという性質があり、問題によっては主問題よりも双対問題のほうが解きやすいものもあるので、双対問題を解いて最適解を求めるという手法が用いられることがある。

また、主問題と双対問題を組み合わせたものとして主双対問題というものがある。主双対問題の目的関数は、主問題と双対問題の目的関数の差であり、これは最適解において０になる。また制約条件は主問題と双対問題の制約条件を合わせたものになる。主問題が目的関数を最大にする問題だとすると、双対問題・主双対問題の式は以下のように表される。

主問題

目的関数　$\mathrm{a}x+\mathrm{b}y$　**…最大化する**

制約条件
$$\begin{cases} \mathrm{c}x+\mathrm{d}y\leq \mathrm{e} \\ \mathrm{f}x+\mathrm{g}y\leq \mathrm{h} \\ x\geq 0,\ y\geq 0 \end{cases}$$

双対問題

目的関数　$\mathrm{e}z+\mathrm{h}w$　**…最小化する**

制約条件
$$\begin{cases} \mathrm{c}z+\mathrm{f}w\geq \mathrm{a} \\ \mathrm{d}z+\mathrm{g}w\geq \mathrm{b} \\ z\geq 0,\ w\geq 0 \end{cases}$$

主双対問題

目的関数　$\mathrm{a}x+\mathrm{b}y-\mathrm{e}z-\mathrm{h}w$　**…0 にする**

制約条件
$$\begin{cases} \mathrm{c}x+\mathrm{d}y\leq \mathrm{e} \\ \mathrm{f}x+\mathrm{g}y\leq \mathrm{h} \\ \mathrm{c}z+\mathrm{f}w\geq \mathrm{a} \\ \mathrm{d}z+\mathrm{g}w\geq \mathrm{b} \\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ w\geq 0 \end{cases}$$

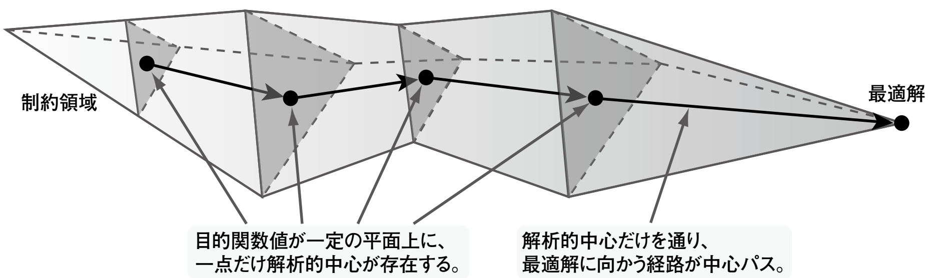


図５　解析的中心と中心パス

これまで主問題のみを解く内点法と双対問題のみを解く内点法は知られていた。そこに先生は新たな内点法として、主問題と双対問題を組み合わせた問題である主双対問題を解く内点法を提案した。これが主双対内点法である。主双対問題を解いた時の動点の経路は、主問題と双対問題を解いたときのそれぞれの動点の経路を組み合わせてできる。例えば主問題と双対問題の動点の経路を点列として表したときに主問題の経路が(x_n, y_n)、双対問題の経路が(z_n, w_n)で表されるなら、主双対問題の経路は(x_n, y_n, z_n, w_n)と表すことができる(**図６**)。

主双対内点法の利点について説明する。主双対問題では解析的中心を定義し、その位置を計算するのが簡単なので、中心パスを求めやすい。そして、主双対問題の中心パスは主問題・双対問題のそれと比べて中心パスの起伏が少ないので動点の移動回数が少ない。よって、中心パスを通ると最適解にたどり着くまでの計算時間が少ない。主双対内点法は主双対問題の中心パスの性質を有効活用した解法とであると言える。また、従来の内点法と比べて仕組みが分かりやすいという利点もある。以上の利点から主双対内点法は実用化され、またその計算時間の少なさが様々な問題を解くことによって実証された結果、内点法の代表的な手法となった。

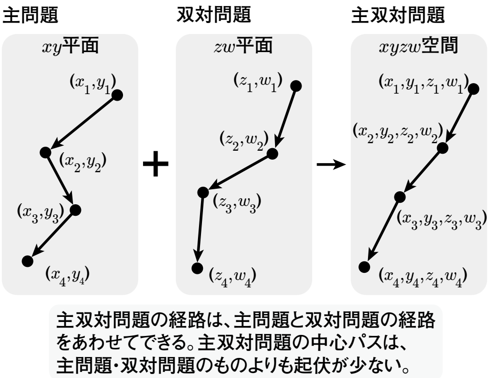


図６　主双対問題の経路

現在、先生は研究のテーマを内点法から単体法へと移している。内点法が開発されて久しい今でも、単体法が活躍する線形計画問題が多く存在するためだ。いま、先生が単体法に関して研究を行なっていることは二つある。一つは、どのような特徴を持った線形計画問題が単体法で解きやすいのかということだ。そしてもう一つは、単体法で解きやすいという特徴をもった線形計画問題が、具体的にどれくらいの時間で解けるかということである。これらの研究によって、割り当て問題と呼ばれる問題が単体法で短い時間で解けるということが分かった。

割り当て問題について説明しよう。n 人の作業員と n 個の仕事があるとする。作業員はそれぞれの仕事に対して向き不向きがあり、また一人の作業員は一つの仕事しかできない。このとき、どの作業員にどの仕事を割り振れば利益が大きくなるかを考えるのが割り当て問題である。具体例として、水泳のメドレーリレーが考えられる。メドレーリレーではバタフライ・平泳ぎ・背泳ぎ・自由形の四つの種目を四人の選手がそれぞれ一つずつ担当し、合計タイムを競う。このとき各選手のそれぞれの種目のタイムをみて、どの選手がどの種目を担当するか決める必要がある。そこでどうすれば合計タイムが短くなるか考えるのが割り当て問題であると言える。

冒頭で述べた企業の仕事や資金の割り振りも割り当て問題に含まれる。割り当て問題は最適化を行いたい問題としては代表的なものであり、それが単体法で短い時間で解けると分かったことは大きな成果であると言える。

線形計画問題を解くことによる最適化の技術は、今後も世の中で広く応用されていくだろう。その第一線で活躍している先生の、今後の研究に大いに期待したい。

数学には純粋数学と応用数学と呼ばれるものがあります。応用数学は数学を世の中のために役立てる学問のことですが、それが具体的にどのようなものなのか自分は知りませんでした。

数学が好きな自分としては、先生から応用数学についての話を聞けたことは貴重な体験でした。

先生には初学者にも分かりやすい丁寧な説明をしていただき、とても感謝しています。ありがとうございました。

（斎藤 純）