オペレーションズリサーチ　**期末試験解答例**　２００５年2月１５日

問題１

次に示すような線形計画問題がある。２段階シンプレックス法を適用することにより、最適解と最適値を求めよ。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ \text{制約条件} & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6, \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{array}$$

まず人工問題を作る。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & w(= -x_4 - x_5) = -10 + 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{制約条件} & x_4 = 4 - 2x_1 + 2x_2 - 3x_3, \\ & x_5 = 6 - 3x_1 - 4x_2 - x_3, \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \end{array}$$

x_1 を基底変数とし x_4 を非基底変数とすることにより、次の辞書を得る。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & w = 7x_2 - \dfrac{7}{2}x_3 - \dfrac{5}{2}x_4 \\ \text{制約条件} & x_1 = 2 + x_2 - \dfrac{3}{2}x_3 - \dfrac{1}{2}x_4, \\ & x_5 = -7x_2 + \dfrac{7}{2}x_3 + \dfrac{3}{2}x_4, \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \end{array}$$

x_2 を基底変数とし x_5 を非基底変数とすることにより、次の辞書を得る。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & w = -x_4 - x_5 \\ \text{制約条件} & x_1 = 2 - x_3 - \dfrac{2}{7}x_4 - \dfrac{1}{7}x_5, \\ & x_2 = \dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{3}{14}x_4 - \dfrac{1}{7}x_5, \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \end{array}$$

最適値が 0 となり、基底変数に人工変数が含まれない辞書が得られた。このとき、x_1, x_2 を基底変数として元の問題の辞書をつくることができる。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = 8 + \dfrac{1}{2}x_3 \\ \text{制約条件} & x_1 = 2 - x_3, \\ & x_2 = \dfrac{1}{2}x_3, \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3). \end{array}$$

x_3 を基底変数とし x_1 を非基底変数とすることにより、次の辞書を得る。

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & z = 9 - \dfrac{1}{2}x_1 \\
\text{制約条件} & x_3 = 2 - x_1, \\
& x_2 = 1 - \dfrac{1}{2}x_1, \\
& x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3).
\end{array}
$$

この辞書の目的関数において、係数が正である非基底変数は存在しない。よって、最適解は $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 2)$ であり、そのときの最適値は 9 となる。

問題2

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ を満たす $x, y, z \in \Re$ の中で、関数 $f(x, y, z) = e^x(\cos y + z \sin y)$ を最小にする点について考える。このとき、KKT 条件（最適解であるための一次の必要条件）はどのようになるか述べよ。なお最適解は求めなくても良い。

ラグランジュ関数は $L(x, y, z, u) = e^x(\cos y + z \sin y) + u(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ となる。よって、KKT 条件は、

$$
\begin{cases}
\nabla_x L(x, y, z, u) = e^x(\cos y + z \sin y) + 2ux = 0, \\
\nabla_y L(x, y, z, u) = e^x(\sin y - z \cos y) + 2uy = 0, \\
\nabla_z L(x, y, z, u) = e^x \sin y + 2uz = 0, \\
x^2 + y^2 + z^2 - 1 \leq 0, \\
u \geq 0, \\
u(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0
\end{cases}
$$

である。

問題3

以下の問題Aはナップザック問題の緩和問題であり、問題Bはその双対問題である。ただし、$a_i, c_i, b \in \Re$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ は既知の正数で、$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \frac{c_3}{a_3} \geq \frac{c_4}{a_4}$ の順に並んでいるものとする。

問題A

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \sum_{i=1}^{4} c_i x_i \\
\text{制約条件} & \sum_{i=1}^{4} a_i x_i \leq b, \\
& 0 \leq x_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4).
\end{array}
$$

問題B

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & b y_0 + \sum_{i=1}^{4} y_i \\
\text{制約条件} & a_i y_0 + y_i \geq c_i \quad (i = 1, 2, 3, 4), \\
& y_i \geq 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4).
\end{array}
$$

1. 問題Aと問題Bが双対の関係にあることを示せ。
2. 以下では、不等式 $a_1 + a_2 \leq b < a_1 + a_2 + a_3$ が成立しているとする。$\widetilde{y_0} = \frac{c_3}{a_3}$, $\widetilde{y_i} = c_i - a_i \frac{c_3}{a_3}$ $(i = 1, 2)$, $\widetilde{y_i} = 0$ $(i = 3, 4)$ が、問題Bの実行可能解となっていることを示せ。

3. 問題Aの最適解を予想し、（弱）双対定理を使ってそれが最適解であることを示せ。

---

1. 問題Aを線形計画問題の等式標準形に書き直すと、変数 $\boldsymbol{x} \in \Re^9$ を使って

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

となる。この双対問題は、

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \begin{pmatrix} b & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \\ \text{制約条件} & \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

である。これは、書き換えることにより、

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & by_0 + \sum_{i=1}^4 y_i \\ \text{制約条件} & a_i y_0 + y_i \geq c_i \quad (i = 1, 2, 3, 4), \\ & y_i \geq 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4) \end{array}$$

となるので、問題Aと問題Bは双対の関係にあるといえる。

2. $\widetilde{y_0} = \dfrac{c_3}{a_3},\ \widetilde{y_1} = c_1 - a_1 \dfrac{c_3}{a_3},\ \widetilde{y_2} = c_2 - a_2 \dfrac{c_3}{a_3},\ \widetilde{y_3} = \widetilde{y_4} = 0$ が、問題Bの制約条件を満たしているかどうか確認すればよい。以下では、$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \frac{c_3}{a_3} \geq \frac{c_4}{a_4}$ という条件を使っている。

$$\begin{array}{ll} a_1\widetilde{y_0} + \widetilde{y_1} = a_1 \dfrac{c_3}{a_3} + c_1 - a_1 \dfrac{c_3}{a_3} = c_1 \geq c_1, & a_2\widetilde{y_0} + \widetilde{y_2} = a_2 \dfrac{c_3}{a_3} + c_2 - a_2 \dfrac{c_3}{a_3} = c_2 \geq c_2, \\ a_3\widetilde{y_0} + \widetilde{y_3} = a_3 \dfrac{c_3}{a_3} = c_3 \geq c_3, & a_4\widetilde{y_0} + \widetilde{y_4} = a_4 \dfrac{c_3}{a_3} \geq a_4 \dfrac{c_4}{a_4} = c_4, \\ \widetilde{y_0} = \dfrac{c_3}{a_3} \geq 0, & \widetilde{y_1} = c_1 - a_1 \dfrac{c_3}{a_3} \geq c_1 - a_1 \dfrac{c_1}{a_1} = 0, \\ \widetilde{y_2} = c_2 - a_2 \dfrac{c_3}{a_3} \geq c_2 - a_2 \dfrac{c_2}{a_2} = 0, & \widetilde{y_3} = \widetilde{y_4} = 0 \geq 0. \end{array}$$

全ての制約条件を満たすため、$(\widetilde{y_0}, \widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}, \widetilde{y_3}, \widetilde{y_4})$ は問題Bの実行可能解である。

3. 問題Aはナップザック問題の緩和問題であり、$a_1 + a_2 \leq b < a_1 + a_2 + a_3$ が成立しているので、最適解は $x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = \dfrac{b - a_1 - a_2}{a_3},\ x_4 = 0$ と予想される。弱双対定理から、主

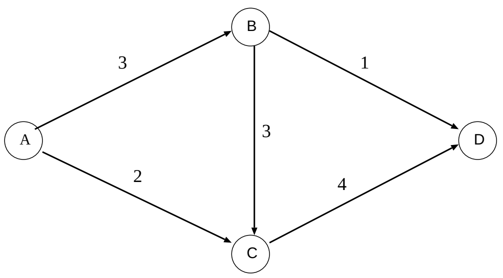
問題と双対問題の実行可能解を一組もってきたとき、目的関数値が等しいならば、それらの実行可能解は主問題と双対問題の最適解（の一つ）となる。先程のベクトルは、問題A（主問題）の実行可能解であり、目的関数値は $c_1+c_2+c_3\dfrac{b-a_1-a_2}{a_3}$ となる。また、2. で述べたベクトルは問題B（双対問題）の実行可能解であり、目的関数値は $b\dfrac{c_3}{a_3}+c_1-a_1\dfrac{c_3}{a_3}+c_2-a_2\dfrac{c_3}{a_3}$ となる。両者の目的関数値は等しいので、$x_1=x_2=1,\ x_3=\dfrac{b-a_1-a_2}{a_3},\ x_4=0$ は、問題Aの最適解であるといえる。

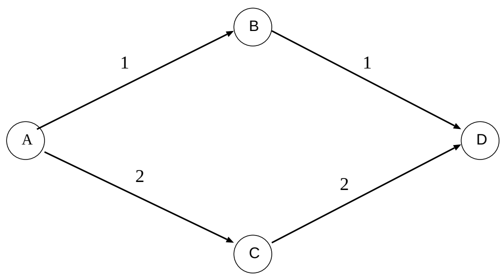
問題4

1. あるネットワーク (G,V,u) に対する最大流問題を、フロー増加法で解くことを想定する。残余ネットワークとは何か、例を使ってわかりやすく説明せよ。
2. AHP（階層分析法）か DEA（包絡分析法）のどちらか一方を選び、そのモデルや解法について説明せよ。

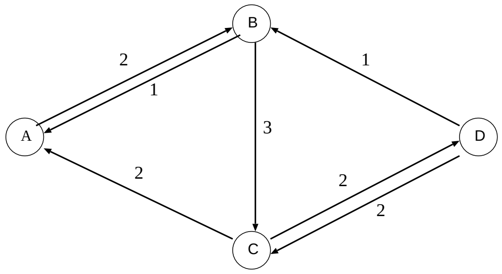
---

1. ネットワークの容量を u、現在のフロー x とする。残余ネットワークとは、元のネットワーク (V,E) の各枝 $(i,j)\in E$ を容量 $u^x_{ij}=u_{ij}-x_{ij}$ をもつ枝 (i,j) と容量 $u^x_{ji}=x_{ij}$ をもつ枝 (j,i) とで置き換えたネットワークである。例えば、ネットワークの容量 u を左図、現在のフロー x を右図のようなものとしよう。





このとき、残余ネットワークは次のようになる。



2. 講義プリントを参照