オペレーションズリサーチ　期末試験問題　２００５年2月１５日

注意　・すべての答案用紙に学籍番号、氏名、問題番号を忘れずに記入すること。
　　　・答えは結果のみではなく、導出過程も要領よく記述すること。

問題１

次に示すような線形計画問題がある。２段階シンプレックス法を適用することにより、最適解と最適値を求めよ。

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & z = 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\
\text{制約条件} & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\
& 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6, \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.
\end{array}
$$

問題２

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ を満たす $x, y, z \in \Re$ の中で、関数 $f(x, y, z) = e^x(\cos y + z \sin y)$ を最小にする点について考える。このとき、KKT 条件（最適解であるための一次の必要条件）はどのようになるか述べよ。なお最適解は求めなくても良い。

問題３

以下の問題Ａはナップザック問題の緩和問題であり、問題Ｂはその双対問題である。ただし、$a_i, c_i, b \in \Re$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ は既知の正数で、$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \frac{c_3}{a_3} \geq \frac{c_4}{a_4}$ の順に並んでいるものとする。

問題Ａ

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \sum_{i=1}^4 c_i x_i \\
\text{制約条件} & \sum_{i=1}^4 a_i x_i \leq b, \\
& 0 \leq x_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4).
\end{array}
$$

問題Ｂ

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & b y_0 + \sum_{i=1}^4 y_i \\
\text{制約条件} & a_i y_0 + y_i \geq c_i \quad (i = 1, 2, 3, 4), \\
& y_i \geq 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4).
\end{array}
$$

1. 問題Ａと問題Ｂが双対の関係にあることを示せ。
2. 以下では、不等式 $a_1 + a_2 \leq b < a_1 + a_2 + a_3$ が成立しているとする。$\widetilde{y_0} = \frac{c_3}{a_3}$, $\widetilde{y_i} = c_i - a_i \frac{c_3}{a_3}$ $(i = 1, 2)$, $\widetilde{y_i} = 0$ $(i = 3, 4)$ が、問題Ｂの実行可能解となっていることを示せ。
3. 問題Ａの最適解を予想し、（弱）双対定理を使ってそれが最適解であることを示せ。

問題４

1. あるネットワーク (G, V, u) に対する最大流問題を、フロー増加法で解くことを想定する。残余ネットワークとは何か、例を使ってわかりやすく説明せよ。
2. AHP（階層分析法）か DEA（包絡分析法）のどちらか一方を選び、そのモデルや解法について説明せよ。