オペレーションズリサーチ　中間試験解答例　２００５年１１月２２日

問題１

以下の線形計画問題を標準形に直した後、シンプレックス法により解け。

なお、$(x_1, x_2) = (0, 0)$ を初期解とし（x_1, x_2 を非基底変数とする)、各反復で基底に入るまたは出る変数の選択理由は明記すること。

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & z = -3x_1 - 2x_2 \\ \text{制約条件} & 2x_1 \leq 6 + 0.5x_2, \\ & 2x_2 \leq 4 + x_1, \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{array}$$

目的関数を最大化にし、スラック変数 x_3, x_4 を加え移項することにより、標準形をつくる。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{制約条件} & 2x_1 - 0.5x_2 + x_3 = 6, \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{array}$$

x_1, x_2 を非基底変数とし辞書をつくる。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{制約条件} & x_3 = 6 - 2x_1 + 0.5x_2, \\ & x_4 = 4 + 1x_1 - 2x_2, \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{array}$$

目的関数において非基底変数 x_1 にかかる係数は 3 で正なので、これを基底変数とする。x_1 を増やしていったとき、最初に 0 となる基底変数は x_3 なので、これを非基底変数とする。すると次の辞書を得る。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = 9 + \frac{11}{4}x_2 - \frac{3}{2}x_3 \\ \text{制約条件} & x_1 = 3 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3, \\ & x_4 = 7 - \frac{7}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3, \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{array}$$

目的関数において非基底変数 x_2 にかかる係数は $\frac{11}{4}$ で正なので、これを基底変数とする。x_2 を増やしていったとき、最初に 0 となる基底変数は x_4 なので、これを非基底変数とする。すると次の辞書を得る。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = 20 - \frac{16}{7}x_3 - \frac{11}{7}x_4 \\ \text{制約条件} & x_1 = 4 - \frac{4}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4, \\ & x_2 = 4 - \frac{2}{7}x_3 - \frac{4}{7}x_4, \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{array}$$

この辞書の目的関数において、係数が正である非基底変数は存在しない。

よって、元問題の最適解は $(x_1, x_2) = (4, 4)$ であり、そのときの最適値は -20 となる。

問題 2

次の線形計画問題 (P1) の双対問題は (D1) である。

$$
\text{(P1)} \quad \begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{array}
\qquad
\text{(D1)} \quad \begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}. \end{array}
$$

この事実を利用し、線形計画問題 (P2) の双対問題が (D2) となることを示せ。
（わからなければ、適当にサイズを定め要素ごとに書いて考え始めると良い）

$$
\text{(P2)} \quad \begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{c}_1^T \boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{array}
\qquad
\text{(D2)} \quad \begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{b}_1^T \boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}_1, \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}. \end{array}
$$

(P2) にスラック変数 $\boldsymbol{s}$ を導入し、不等式制約を等式制約に変更する。

$$
\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{c}_1^T \boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}_1, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}. \end{array}
$$

これを、(P1) の形式で記述する。

$$
\begin{array}{ll} \text{最大化} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix} \\ \text{制約条件} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}_1, \\ & \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0}. \end{array}
$$

(P1) の双対問題は (D1) で与えられているので、この問題の双対問題をつくることができる。

$$
\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{b}_1^T \boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^T \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \geq \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}. \end{array}
$$

この問題は次のように変形でき、これはすなわち (D2) である。

$$
\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{b}_1^T \boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}_1, \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}. \end{array}
$$

問題 3

1. 次の凸 2 次計画問題の最適条件を述べよ。

$$
\begin{array}{ll} \text{最大化} & -2x^2 + xy - y^2 + 5x - 3y \\ \text{制約条件} & -x - y \leq 3, \\ & 2x - 3y \leq -6, \\ & x,\ y \geq 0. \end{array}
$$

2. 次の 2 つの条件が必要十分であることを示せ。

- $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ が正定値行列
- $\alpha > \beta^2$

---

1. 凸 2 次計画問題の標準形に直す。

$$\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad && \begin{pmatrix} 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&\text{制約条件} && \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \\
& && \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

この問題の双対を取ると次のようになる（解答として書く必要はない）。

$$\begin{aligned}
&\text{最小化} \quad && \begin{pmatrix} 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&\text{制約条件} && \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\
& && \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

x, y が問題の凸 2 次計画問題の最適解となるための必要十分条件は、次の等式・不等式系を満たす z, w, u_1, u_2, v_1, v_2 が存在することである。

- $\begin{pmatrix} 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

なお一つ目の等式は、相補性条件の形

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

などにしてもよい

2. まず、行列の正定値性を以下のような必要十分な条件で書き換える。

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \text{が正定値行列} \\
\iff \quad & \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0 \\
\iff \quad & x = y = 0 \text{ ではない任意の } x, y \text{ に対して、} \alpha x^2 + 2\beta xy + y^2 > 0 \\
\iff \quad & x = y = 0 \text{ ではない任意の } x, y \text{ に対して、} (y + \beta x)^2 + (\alpha - \beta^2) x^2 > 0 \qquad \cdots\cdots (*)
\end{aligned}$$

- $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ が正定値行列 $\Longrightarrow$ $\alpha > \beta^2$ を証明
  正定値行列を仮定するので、$(*)$ が成り立つ。これに、$x = 1,\ y = -\beta$ を代入すると、$\alpha - \beta^2 > 0$ を得る。よって、$\alpha > \beta^2$ である。

- $\alpha > \beta^2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ が正定値行列　を証明
  $\alpha - \beta^2 > 0$ より、任意の x, y に対して、$(y + \beta x)^2 + (\alpha - \beta^2)x^2 \geq 0$ は明らか。また、$x = y = 0$ ではない場合、$y + \beta x$ か x のどちらかは 0 では無いので、$(y + \beta x)^2 + (\alpha - \beta^2)x^2 > 0$ も成り立つ。つまり $(*)$ が成り立つので、$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ は正定値行列といえる。

問題 4

関数 $f(x, y) = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - 24x - 38y$ の最小化について考える。

1. 最急降下法を適用する場合、点 $(1, 1)$ での探索方向を求めよ。
2. ニュートン法を適用する場合、点 $(2, 1)$ での探索方向を求めよ。
3. 局所的最小解であるための必要条件あるいは十分条件を用い、点 $(3, 2)$ が局所的最小解であることを示せ。

---

1. $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x + 6y - 24 \\ 6x + 10y - 38 \end{pmatrix}$ より、点 $(1, 1)$ での勾配ベクトルは $\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} -14 \\ -22 \end{pmatrix}$ である。
   よって、最急降下法の探索方向は $-\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} 14 \\ 22 \end{pmatrix}$ となる（定数倍していても良い）。
2. $\nabla f(2, 1) = \begin{pmatrix} -10 \\ -16 \end{pmatrix}$ である。また、$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ となるので、これが点 $(2, 1)$ でのヘッセ行列となる。よって、ニュートン法の探索方向は $-\nabla^2 f(2, 1)^{-1} \nabla f(2, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる（定数倍していても良い）。
3. 二次の十分条件を確認する。
   まず、$\nabla f(3, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であることが分かる。次に、ヘッセ行列は $\nabla^2 f(3, 2) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ であるが、

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4x^2 + 12xy + 10y^2 = (2x + 3y)^2 + y^2 > 0$$

   より、正定値行列であることが分かる。点 $(3, 2)$ は二次の十分条件を満たしているため、局所的最小解である。