オペレーションズリサーチ　中間試験解答例　　２００６年１２月５日

問題１

以下の線形計画問題をシンプレックス法により解け。なお、$(x_1, x_2) = (0, 0)$ を初期解とする（x_1, x_2 を非基底変数とする）こと。解答にあたり、各反復で基底に入るまたは出る変数の選択理由は明記するように。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{制約条件} & x_1 + x_2 \leq 5, \quad x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ & 3x_1 + x_2 \leq 9, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{array}$$

- まず、不等式にスラック変数 x_3, x_4, x_5 を導入して標準形にする。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{制約条件} & x_1 + x_2 + x_3 = 5, \quad x_1 + 2x_2 + x_4 = 8, \\ & 3x_1 + x_2 + x_5 = 9, \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{array}$$

- x_1, x_2 を非基底変数、x_3, x_4, x_5 を基底変数とし辞書をつくる。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{制約条件} & x_3 = 5 - x_1 - x_2, \quad x_4 = 8 - x_1 - 2x_2, \\ & x_5 = 9 - 3x_1 - x_2, \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{array}$$

- 目的関数の中で非基底変数 x_1 にかかる係数は 2 で正なので、これを基底変数にする。x_1 を増やしていったとき、最初に 0 となる基底変数は x_5 なので、これを非基底変数とする。すると次の辞書を得る。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 6 + \frac{7}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_5 \\ \text{制約条件} & x_1 = 3 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5, \quad x_3 = 2 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_5, \\ & x_4 = 5 - \frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_5, \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{array}$$

- 目的関数の中で非基底変数 x_2 にかかる係数は $\frac{7}{3}$ で正なので、これを基底変数にする。x_2 を増やしていったとき、最初に 0 となる基底変数は x_3 と x_4 なので、x_3 を非基底変数とする。すると次の辞書を得る。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 13 - \frac{7}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5 \\ \text{制約条件} & x_1 = 2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5, \quad x_2 = 3 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5, \\ & x_4 = 0 + \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5, \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{array}$$

- 目的関数の中で非基底変数 x_5 にかかる係数は $\frac{1}{2}$ で正なので、これを基底変数にする。x_5 を増やそうとしたとき、最初に 0 となる基底変数は x_4 なので、これを非基底変数とする。すると次の辞書を

得る。

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 13 - x_3 - x_4 \\
\text{制約条件} & x_1 = 2 - 2x_3 + x_4, \quad x_2 = 3 + x_3 - x_4, \\
 & x_5 = 0 + 5x_3 - 2x_4, \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.
\end{array}
$$

- この辞書の目的関数において、係数が正である非基底変数は存在しない。よって、問題の最適解は $(x_1, x_2) = (2, 3)$ であり、そのときの最適値は 13 となる。

問題 2

次のような線形計画問題 (P) について考える。以下の設問に答えることにより、この問題の双対問題の双対問題が、また元の問題に戻ることを確認せよ。

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{最大化} & 8x_1 + \ \ x_2 + 6x_3 \\
 & \text{制約条件} & 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 15, \\
 & & 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 15, \\
 & & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{array}
$$

1. 線形計画問題 (P) の双対問題を作れ。
2. 1. で作った問題を変形して、主問題の形式（標準形）に変換せよ。
3. 2. で作った問題の双対を取り、それが元問題 (P) と等価であることを説明せよ。

1. 問題 (P) を行列を使って表すと、その双対問題をつくりやすくなる。

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \begin{pmatrix} 15 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
\text{制約条件} & \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 9 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

2. (i) 不等式制約にスラック変数 s_1, s_2, s_3 を加え等式にする。(ii) 自由変数 y_1, y_2 を 2 つの非負変数の差 $y_1 = y_3 - y_4$, $y_2 = y_5 - y_6$ で表す。(iii) 目的関数の係数を -1 倍して最大化にする。以上の操作によって、次のような標準形が得られる。

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \begin{pmatrix} -15 & 15 & -15 & 15 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \\
\text{制約条件} & \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 9 & -9 & 0 & -1 & 0 \\ 7 & -7 & 2 & -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \\
 & \begin{pmatrix} y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}.
\end{array}
$$

3. まず、2. で作った問題の双対をとる。

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\
\text{制約条件} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -3 & -5 & -7 \\ 4 & 9 & 2 \\ -4 & -9 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ -15 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

最初の 2 つの不等式 $3z_1 + 5z_2 + 7z_3 \geq -15$ と $-3z_1 - 5z_2 - 7z_3 \geq 15$ は、1 つの等式 $3z_1 + 5z_2 + 7z_3 = -15$ に置き換えられる。同様に、$4z_1 + 9z_2 + 2z_3 \geq -15$ と $-4z_1 - 9z_2 - 2z_3 \geq 15$ は、$4z_1 + 9z_2 + 2z_3 = -15$ に置き換えられる。そして、$-z_1 \geq 0,\ -z_2 \geq 0,\ -z_3 \geq 0$ という不等式を外に出す。すると、次のような問題に書き換えることができる。

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & 8z_1 + 1z_2 + 6z_3 \\
\text{制約条件} & 3z_1 + 5z_2 + 7z_3 = -15, \\
& 4z_1 + 9z_2 + 2z_3 = -15, \\
& -z_1,\ -z_2,\ -z_3 \geq 0.
\end{array}
$$

$x_1 = -z_1$, $x_2 = -z_2$, $x_3 = -z_3$ とし、目的関数を最小化から最大化にすると、これは元問題 (P) に他ならない。

問題３

ある凸２次計画問題の最適条件から、下のような線形相補性問題が導かれた。左の方にある４行４列の行列が半正定値行列であることを、定義に基づいて示せ。

$$
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

行列 $\boldsymbol{A}$ が半正定値であることの定義は、$\forall \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \geq 0$ である。
$\forall \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T \in \Re^4$ に対して、

$$
\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
&= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

よって、半正定値であることが示された。

問題 4

３次元ユークリッド空間上に２つの平面 $\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \Re^3 \mid x_1 + x_2 = 4\}$ と $\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \Re^3 \mid 2x_2 + x_3 = -2\}$ がある。これらの共通部分に属するベクトルの中で、ベクトル $(-3, 1, 2)^T$ に最も近いものを求めたい。この問題は、$\boldsymbol{x} \in \Re^3$ を変数とする次のような形式の制約付き非線形計画問題として定式化できる。

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c})^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \end{array}$$

1. 定数行列 $\boldsymbol{A}$ と定数ベクトル $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は、具体的にどのような値になるか述べよ。
2. この問題のラグランジュ関数を示せ。（わからなければ行列やベクトルでなく成分ごとに書き下して考えると良い）
3. この問題の KKT 条件 (最適解であるための一次の必要条件）を導出せよ。
4. 3. で求めた KKT 条件を満たす点を計算せよ。

1. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. 制約条件を $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とすると、非線形計画問題の標準形となる。ラグランジュ関数は、ラグランジュ乗数 $\boldsymbol{\lambda} \in \Re^2$ を用いて、

   $$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c})^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}).$$

   もしくは、成分毎に書いて、

   $$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = (x_1 + 3)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 2)^2 + \lambda_1(4 - x_1 - x_2) + \lambda_2(-2 - 2x_2 - x_3).$$

3. この問題は、等式制約のみの非線形計画問題である。よって、KKT 条件は次のように表せる。

   $$\nabla_{x_1} L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 2x_1 + 6 - \lambda_1 = 0 \tag{1}$$
   $$\nabla_{x_2} L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 2x_2 - 2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \tag{2}$$
   $$\nabla_{x_3} L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 2x_3 - 4 - \lambda_2 = 0 \tag{3}$$
   $$\nabla_{\lambda_1} L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 4 - x_1 - x_2 = 0 \tag{4}$$
   $$\nabla_{\lambda_2} L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = -2 - 2x_2 - x_3 = 0 \tag{5}$$

4. (2) $-$ (1) $-$ 2 $\times$ (3) より、 $-2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0$ を得る。この式と (4), (5) から、x_1, x_2, x_3 に関する３元連立一次方程式が立つ。これを解くと、 $x_1 = 4, \ x_2 = 0, \ x_3 = -2$ が得られる。なお、$\lambda_1 = 14, \ \lambda_2 = -8$ である。