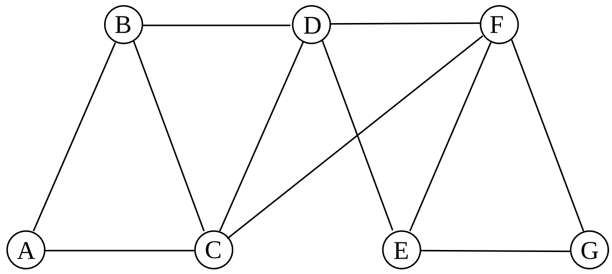
オペレーションズリサーチ　期末試験略解　２００７年2月１３日

問題１

図のグラフにおいて、頂点Ａから頂点Ｇへの路（パス）は多数考えられる。それらの路の中で、途中で通る頂点が最も少なくなるものを知りたい。このとき以下の問いに答えよ。



1. **この問題は、あるネットワークに対する最短路問題として考えられることを説明せよ。**
2. 1. **の最短路問題をダイクストラ法で解き、題意を満たす路を求めよ。**

1. 途中で通る頂点の数は、途中で通る枝の数から１を引いたものに等しい。つまり、途中で通る頂点の数が最も少ない路は、途中で通る枝の数が最も少ない路と同じである。また、全ての枝の重みを１としたネットワークでは、路の枝の数と路の距離は等しくなる。よって、そのようなネットワークに対する最短路問題を解けばよい。
2. $d(i)$ を頂点 A から頂点 i への最短路の距離の上界値、S を最短路が分かっている頂点の集合、$P(i)$ を頂点 A から頂点 i までの最短路において、直前に位置する頂点とする。また、頂点 A,B,C,D,E,F の順に $d(i)$ や $P(i)$ を並べたものを、$\boldsymbol{d}, \boldsymbol{P}$ と表記する。

初期値　$S = \emptyset, \quad \boldsymbol{d} = (0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty), \quad \boldsymbol{P} = (\,?\,, ?\,, ?\,, ?\,, ?\,, ?\,, ?\,).$

反復１　$\min_{i \in \bar{S}} d(i) = d(\mathrm{A})$ より、頂点 A が確定し S に入る。

- $d(\mathrm{B}) > d(\mathrm{A}) + 1$ より、 $d(\mathrm{B}) = 1, P(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$
- $d(\mathrm{C}) > d(\mathrm{A}) + 1$ より、 $d(\mathrm{C}) = 1, P(\mathrm{C}) = \mathrm{A}$

$S = \{\mathrm{A}\}, \quad \boldsymbol{d} = (0, 1, 1, \infty, \infty, \infty, \infty), \quad \boldsymbol{P} = (\,?\,, \mathrm{A}, \mathrm{A}, ?\,, ?\,, ?\,, ?\,).$

反復２　$\min_{i \in \bar{S}} d(i) = d(\mathrm{B})$ より、頂点 B が確定し S に入る。

- $d(\mathrm{C}) \leq d(\mathrm{B}) + 1$
- $d(\mathrm{D}) > d(\mathrm{B}) + 1$ より、 $d(\mathrm{D}) = 2, P(\mathrm{D}) = \mathrm{B}$

$S = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}, \quad \boldsymbol{d} = (0, 1, 1, 2, \infty, \infty, \infty), \quad \boldsymbol{P} = (\,?\,, \mathrm{A}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, ?\,, ?\,, ?\,).$

反復３　$\min_{i \in \bar{S}} d(i) = d(\mathrm{C})$ より、頂点 C が確定し S に入る。

同様に

$S = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}, \quad \boldsymbol{d} = (0, 1, 1, 2, \infty, 2, \infty), \quad \boldsymbol{P} = (\,?\,, \mathrm{A}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, ?\,, \mathrm{C}, ?\,).$

反復４　$\min_{i \in \bar{S}} d(i) = d(\mathrm{D})$ より、頂点 D が確定し S に入る。

$S = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}\}, \quad \boldsymbol{d} = (0, 1, 1, 2, 3, 2, \infty), \quad \boldsymbol{P} = (\,?\,, \mathrm{A}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}, \mathrm{C}, ?\,).$

反復５　$\min_{i\in\bar{S}} d(i) = d(\mathrm{F})$ **より、頂点** F **が確定し** S **に入る。**

$S = \{\mathrm{A,B,C,D,F}\}$,　$\boldsymbol{d} = (0,1,1,2,3,2,3)$,　$\boldsymbol{P} = (\,\textbf{?}\,,\mathrm{A,A,B,D,C,F})$.

反復６　$\min_{i\in\bar{S}} d(i) = d(\mathrm{E})$ **より、頂点** E **が確定し** S **に入る。**

$S = \{\mathrm{A,B,C,D,F,E}\}$,　$\boldsymbol{d} = (0,1,1,2,3,2,3)$,　$\boldsymbol{P} = (\,\textbf{?}\,,\mathrm{A,A,B,D,C,F})$.

反復７　$\min_{i\in\bar{S}} d(i) = d(\mathrm{G})$ **より、頂点** G **が確定し** S **に入る。**

$S = \{\mathrm{A,B,C,D,F,E,G}\}$,　$\boldsymbol{d} = (0,1,1,2,3,2,3)$,　$\boldsymbol{P} = (\,\textbf{?}\,,\mathrm{A,A,B,D,C,F})$.

反復８　S **に全ての頂点が含まれたので終了。**

$P(i)$ **を辿っていくことにより、題意を満たす路は、**

A — C — F — G

で、途中で通る頂点は２つであることが分かる。

問題２

1. **次のように定式化できる輸送問題がある。北西隅の方法による初期実行可能基底解、ならびにハウザッカー法（輸送費用が小さい枝から順に選ぶ）による初期実行可能基底解を求めよ。**

$$\begin{array}{lll}
\textbf{最小化} & \multicolumn{2}{l}{6x_{11}+7x_{12}+2x_{13}+8x_{21}+5x_{22}+9x_{23}+x_{31}+3x_{32}+4x_{33}} \\
\textbf{制約条件} & x_{11}+x_{12}+x_{13}=10, & x_{21}+x_{22}+x_{23}=30, \\
 & x_{31}+x_{32}+x_{33}=25, & x_{11}+x_{21}+x_{31}=20, \\
 & x_{12}+x_{22}+x_{32}=30, & x_{13}+x_{23}+x_{33}=15, \\
 & \multicolumn{2}{l}{x_{11},x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},x_{23},x_{31},x_{32},x_{33}\geq 0.}
\end{array}$$

2. 3 **つの事業体を** DEA**（包絡分析法）で評価することを考える。それぞれの事業体のデータ（２入力２出力）は表の通りである。事業体１の（**CCR **モデルに基づいた）**D **効率値を求める数理計画問題を書け。**

	事業体１	**事業体２**	**事業体３**
入力１	20	30	15
入力２	25	50	10
出力１	40	30	15
出力２	10	30	20

1. **北西隅の方法：番号の小さい順に基底に入れていく。**

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 0 \\ 0 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

ハウザッカー法：輸送費用が小さい枝から順に基底に入れていく。

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 25 & 5 \\ 20 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

2. CCR モデルに基づいた D 効率値は、次の最適化問題の最適値である。(線形計画問題に変形した形でも良い)

$$\begin{array}{ll} \max & \dfrac{40u_1+10u_2}{20v_1+25v_2} \\ \text{s.t.} & \dfrac{40u_1+10u_2}{20v_1+25v_2} \le 1, \quad \dfrac{30u_1+30u_2}{30v_1+50v_2} \le 1, \\ & \dfrac{15u_1+20u_2}{15v_1+10v_2} \le 1, \quad u_1, u_2, v_1, v_2 \ge 0. \end{array}$$

問題３

次の 0–1 計画問題を分枝限定法を使って解け。分枝操作は x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 の順にするとよい。

$$\begin{array}{ll} \textbf{最大化} & 60x_1+50x_2+60x_3+50x_4+50x_5 \\ \textbf{制約条件} & 35x_1+50x_2+30x_3+35x_4+30x_5 \le 100, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0,1\}. \end{array}$$

$\dfrac{60}{30} \ge \dfrac{60}{35} \ge \dfrac{50}{30} \ge \dfrac{50}{35} \ge \dfrac{50}{50}$ となるので、緩和問題の最適解や実行可能解を求めるときは、x_3, x_1, x_5, x_4, x_2 の順に使う。

- 上界は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (1,0,1,\frac{1}{7},1)$ のときで $\bar{z} = 177\frac{1}{7}$、下界は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (1,0,1,0,1)$ のときで $\underline{z} = 170$ となる。暫定解として $x^0 = (1,0,1,0,1)$、$z^0 = 170$ とする。x_1 を 0 と 1 に固定した 2 つの子問題をつくる(分枝操作をする)。
- $x_1 = 0$ と固定した場合について考える。
  上界は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (0,\frac{1}{10},1,1,1)$ のときで $\bar{z} = 165$、下界は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (0,0,1,1,1)$ のときで $\underline{z} = 160$ となる。上界 $\bar{z}$ が既に得られている下界 z^0 より小さいので、子問題をつくらなくてもよい(限定操作ができる)。
- $x_1 = 1$ と固定した場合について考える。
  上界は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (1,0,1,\frac{1}{7},1)$ のときで $\bar{z} = 177\frac{1}{7}$、下界は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (1,0,1,0,1)$ のときで $\underline{z} = 170$ となる。$x_1 = 1$ とした上で、x_2 を 0 と 1 に固定した 2 つの子問題をつくる(分枝操作をする)。
- $x_1 = 1, x_2 = 0$ と固定した場合について考える。
  上界は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (1,0,1,\frac{1}{7},1)$ のときで $\bar{z} = 177\frac{1}{7}$、下界は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (1,0,1,0,1)$ のときで $\underline{z} = 170$ となる。$x_1 = 1, x_2 = 0$ とした上で、x_3 を 0 と 1 に固定した 2 つの子問題をつくる(分枝操作をする)。
- $x_1 = 1, x_2 = 1$ と固定した場合について考える。
  上界は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (1,1,\frac{1}{2},0,0)$ のときで $\bar{z} = 140$、下界は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (1,1,0,0,0)$ のときで $\underline{z} = 110$ となる。上界 $\bar{z}$ が既に得られている下界 z^0 より小さいので、子問題をつくらなくてもよい(限定操作ができる)。
- $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$ とした場合について考える。
  上界は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (1,0,0,1,1)$ のときで $\bar{z} = 160$、下界は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) =$

$(1,0,0,1,1)$ のときで $\underline{z}=160$ となる。緩和問題の解が整数となるので、限定操作ができる。

- $x_1=1,x_2=0,x_3=1$ とした場合について考える。
  上界は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(1,0,1,\frac{1}{7},1)$ のときで $\bar{z}=177\frac{1}{7}$、下界は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(1,0,1,0,1)$ のときで $\underline{z}=170$ となる。$x_1=1,x_2=0,x_3=1$ とした上で、x_4 を 0 と 1 に固定した 2 つの子問題をつくる（分枝操作をする）。
- $x_1=1,x_2=0,x_3=1,x_4=0$ とした場合について考える。
  上界は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(1,0,1,0,1)$ のときで $\bar{z}=170$、下界は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(1,0,1,0,1)$ のときで $\underline{z}=170$ となる。緩和問題の解が整数となるので、限定操作ができる。
- $x_1=1,x_2=0,x_3=1,x_4=1$ とした場合について考える。
  上界は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(1,0,1,1,0)$ のときで $\bar{z}=170$、下界は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(1,0,1,1,0)$ のときで $\underline{z}=170$ となる。緩和問題の解が整数となるので、限定操作ができる。

以上より、最適解は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(1,0,1,0,1),(1,0,1,1,0)$ となり、このとき最適値は 170 となる。最適解は１つ求めていれば良い。

問題４

AHP（階層分析法）を用い、３つの代替案Ｘ, Ｙ, Ｚを、４つの評価基準Ａ, Ｂ, Ｃ, Ｄによって評価したい。まず、評価基準間の一対比較表を作成すると、下の表のようになった。このとき、以下の問いに答えよ。

	評価基準Ａ	評価基準Ｂ	評価基準Ｃ	評価基準Ｄ
評価基準Ａ	1	3	1/2	1
評価基準Ｂ	1/3	1	1/6	1/3
評価基準Ｃ	2	6	1	2
評価基準Ｄ	1	3	1/2	1

1. 評価基準のウエイトを計算せよ（簡易計算でよい）。
2. この一対比較表の整合度を求めよ。

次に、それぞれの評価基準に対し、代替案間の一対比較を行いウエイトを計算した。その結果、次のようなウエイト値を得た。

	代替案Ｘ	代替案Ｙ	代替案Ｚ
評価基準Ａ	0.5	0.2	0.3
評価基準Ｂ	0.1	0.8	0.1
評価基準Ｃ	0.2	0.3	0.5
評価基準Ｄ	0.3	0.4	0.3

3. 総合ウェイトを計算し、選択すべき代替案はどれであるか述べよ。

1. 行ごとに幾何平均をとると、順に $(3/2)^{\frac{1}{4}}, (1/54)^{\frac{1}{4}}, (24)^{\frac{1}{4}}, (3/2)^{\frac{1}{4}}$ である。和が１となるよう、全体を $(3/2)^{\frac{1}{4}} + (1/54)^{\frac{1}{4}} + (24)^{\frac{1}{4}} + (3/2)^{\frac{1}{4}}$ で割る。すると評価基準のウェイトは、それぞれ $\dfrac{3}{13}, \dfrac{1}{13}, \dfrac{6}{13}, \dfrac{3}{13}$ であることがわかる。
2. 一対比較行列に右からウェイトベクトルをかけると、$\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix}12 & 4 & 24 & 12\end{pmatrix}^T$ を得る。よって、近似固有値 λ は、

$$\lambda = \frac{1}{4}\Big(\frac{12}{13}/\frac{3}{13} + \frac{4}{13}/\frac{1}{13} + \frac{24}{13}/\frac{6}{13} + \frac{12}{13}/\frac{3}{13}\Big) = 4$$

と計算できる。このとき、整合度は $\dfrac{\lambda - 4}{4 - 1} = 0$ である。
3. 各代替案の総合ウェイト値を計算する。

$$\text{代替案X：}\frac{3}{13} \times 0.5 + \frac{1}{13} \times 0.1 + \frac{6}{13} \times 0.2 + \frac{3}{13} \times 0.3 = \frac{37}{130}$$
$$\text{代替案Y：}\frac{3}{13} \times 0.2 + \frac{1}{13} \times 0.8 + \frac{6}{13} \times 0.3 + \frac{3}{13} \times 0.4 = \frac{44}{130}$$
$$\text{代替案Z：}\frac{3}{13} \times 0.3 + \frac{1}{13} \times 0.1 + \frac{6}{13} \times 0.5 + \frac{3}{13} \times 0.3 = \frac{49}{130}$$

総合ウェイト値が一番大きな代替案Ｚを選ぶとよい。