オペレーションズリサーチ　中間試験解答例

２００７年１１月２７日

問題１

次の線形計画問題を２段階シンプレックス法により解け。解答にあたり、各反復で基底に入るまたは出る変数の選択理由を明記するように。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 \\ \text{制約条件} & x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 12, \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 = 21, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \end{array}$$

人工変数 x_5, x_6 を導入した人工問題を考え、その人工変数を基底とした辞書をつくる。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & w(= -x_5 - x_6) = -33 + 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \\ \text{制約条件} & x_5 = 12 - x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4, \\ & x_6 = 21 - 3x_1 + x_2 - x_3, \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \end{array}$$

目的関数の中で非基底変数 x_1 にかかる係数は 4 で正なので、これを基底変数にする。x_1 を増やしていったとき、最初に 0 となる基底変数は x_6 なので、これを非基底変数とする。すると次の辞書を得る。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & w = -5 + \dfrac{10}{3}x_2 + \dfrac{5}{3}x_3 - x_4 - \dfrac{4}{3}x_6 \\ \text{制約条件} & x_1 = 7 + \dfrac{1}{3}x_2 - \dfrac{1}{3}x_3 - \dfrac{1}{3}x_6, \\ & x_5 = 5 - \dfrac{10}{3}x_2 - \dfrac{5}{3}x_3 + x_4 + \dfrac{1}{3}x_6, \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \end{array}$$

目的関数の中で非基底変数 x_2 にかかる係数は $\frac{10}{3}$ で正なので、これを基底変数にする。x_2 を増やしていったとき、最初に 0 となる基底変数は x_5 なので、x_5 を非基底変数とする。すると次の辞書を得る。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & w = -x_5 - x_6 \\ \text{制約条件} & x_1 = \dfrac{15}{2} - \dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{1}{10}x_4 - \dfrac{1}{10}x_5, - \dfrac{3}{10}x_6 \\ & x_2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{3}{10}x_4 - \dfrac{3}{10}x_5 + \dfrac{1}{10}x_6, \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \end{array}$$

最適値が 0 となり、基底変数に人工変数が含まれない辞書が得られた。このとき、x_1, x_2 を基底変数と

した元の問題の辞書をつくることができる。

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad && z = \frac{21}{2} + \frac{7}{2}x_3 - \frac{27}{10}x_4 \\
&\text{制約条件} \quad && x_1 = \frac{15}{2} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{10}x_4, \\
& && x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{10}x_4, \\
& && x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).
\end{aligned}
$$

目的関数の中で非基底変数 x_3 にかかる係数は $\frac{7}{2}$ で正なので、これを基底変数にする。x_3 を増やしていったとき、最初に 0 となる基底変数は x_2 なので、x_2 を非基底変数とする。すると次の辞書を得る。

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad && z = 21 - 7x_2 - \frac{3}{5}x_4 \\
&\text{制約条件} \quad && x_1 = 6 + x_2 - \frac{1}{5}x_4, \\
& && x_3 = 3 - 2x_2 + \frac{3}{5}x_4, \\
& && x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).
\end{aligned}
$$

この辞書の目的関数において、係数が正である非基底変数は存在しない。よって、問題の最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (6, 0, 3, 0)$ であり、そのときの最適値は 21 となる。

問題 2

次のような線形計画問題の主問題と双対問題について考える。

主問題：

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad && -4x_1 + 8x_2 + 14x_3 - 4x_4 + 2x_5 \\
&\text{制約条件} \quad && x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 8, \\
& && 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 9, \\
& && x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 7, \\
& && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

双対問題：

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化} \quad && 8y_1 + 9y_2 + 7y_3 \\
&\text{制約条件} \quad && y_1 + 2y_2 + y_3 \geq -4, \\
& && 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 8, \\
& && 3y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 14, \\
& && 2y_1 + y_2 \geq -4, \\
& && y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 2.
\end{aligned}
$$

今、主問題の最適解の候補が 4 つ、双対問題の最適解の候補が 3 つある。これらの中に最適解があれば全て選び、その理由を分かりやすく説明せよ。

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.
$$

まず、実行可能性について調べる。$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T$ と $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ は主問題の制約条件

を満たしておらず、実行可能解ではない。よって最適解とは成り得ない。残りの $\begin{pmatrix}3 & 0 & 1.5 & 0 & 0.5\end{pmatrix}^T$ と $\begin{pmatrix}0 & 3 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}^T$ は主問題の実行可能解となっている。また、$\begin{pmatrix}3 & -5 & 7\end{pmatrix}^T$ と $\begin{pmatrix}3 & -8 & 12\end{pmatrix}^T$ と $\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\end{pmatrix}^T$ は、全て双対問題の実行可能解である。

次に、各実行可能解の目的関数値を計算する。すると、主問題の実行可能解 $\begin{pmatrix}0 & 3 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}^T$ の目的関数値と、双対問題の実行可能解 $\begin{pmatrix}3 & -5 & 7\end{pmatrix}^T$, $\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\end{pmatrix}^T$ の目的関数値は共に 28 となり等しいことが分かる。すると双対定理より、これらは主問題と双対問題の最適解であるといえる。

問題３

次の数理計画問題に関して以下の問いに答えよ。

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & 2x^2 - 2xy + 3y^2 + x - 3y \\ \text{制約条件} & x + 2y \geq 4, \\ & -3x + 2y \leq -6, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

1. この問題を２次計画問題の形に変換せよ。目的関数の凸性は証明しなくてよい。
2. 1. の双対問題を述べよ。

1.
   - 目的関数を最大化にする。
   - １番目の不等式制約の両辺に -1 をかける。
   - 自由変数 y を、二つの非負変数の差 $y = y_1 - y_2$ で表す。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \begin{pmatrix}-1 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y_1\\ y_2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x & y_1 & y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ -2 & 6 & -6\\ 2 & -6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y_1\\ y_2\end{pmatrix} \\ \text{制約条件} & \begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -3 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y_1\\ y_2\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}-4\\ -6\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}x\\ y_1\\ y_2\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}. \end{array}$$

2. 双対問題は次のようになる。

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \begin{pmatrix}-4 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ w\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x & y_1 & y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ -2 & 6 & -6\\ 2 & -6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y_1\\ y_2\end{pmatrix} \\ \text{制約条件} & \begin{pmatrix}-1 & -3\\ -2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ w\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}-1\\ 3\\ -3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ -2 & 6 & -6\\ 2 & -6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y_1\\ y_2\end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix}z\\ w\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}. \end{array}$$

問題 4

関数 $f(x,y,z) = x + y^2 + z^4 + e^{(x^2+y^2+z^2)}$ の最小化を行いたい。変数に関して次のような条件があるとき、局所的最小解であるための一次の必要条件（KKT 条件）を求めよ。

1. 変数について特に条件が無い、つまり変数 x,y,z が任意の実数をとれる場合。
2. 変数 x,y,z が、 $x^2+y^2+z^2 \le 200$ を満たさなければならない場合。
3. 変数 x,y,z が、 $x^2+y^2+z^2 \le 200$ で、さらに $z = x+y$ を満たさなければならない場合。

1. 多変数関数の（制約無し）最小化なので、一次の必要条件は勾配ベクトルがゼロベクトルになることである。
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 + 2xe^{(x^2+y^2+z^2)} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2ye^{(x^2+y^2+z^2)} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 4z^3 + 2ze^{(x^2+y^2+z^2)} = 0, \end{cases}$$
2. ラグランジュ関数は $L(x,y,z,u) = x + y^2 + z^4 + e^{(x^2+y^2+z^2)} + u(x^2+y^2+z^2-200)$ である。よって、KKT 条件は以下のように表せる。
$$\begin{cases} \nabla_x L(x,y,z,u) = 1 + 2xe^{(x^2+y^2+z^2)} + 2ux = 0, \\ \nabla_y L(x,y,z,u) = 2y + 2ye^{(x^2+y^2+z^2)} + 2uy = 0, \\ \nabla_z L(x,y,z,u) = 4z^3 + 2ze^{(x^2+y^2+z^2)} + 2uz = 0, \\ x^2+y^2+z^2-200 \le 0, \\ u \ge 0, \\ u(x^2+y^2+z^2-200) = 0. \end{cases}$$
3. ラグランジュ関数は $L(x,y,z,u,v) = x+y^2+z^4+e^{(x^2+y^2+z^2)}+u(x^2+y^2+z^2-200)+v(x+y-z)$ である。よって、KKT 条件は以下のように表せる。
$$\begin{cases} \nabla_x L(x,y,z,u,v) = 1 + 2xe^{(x^2+y^2+z^2)} + 2ux + v = 0, \\ \nabla_y L(x,y,z,u,v) = 2y + 2ye^{(x^2+y^2+z^2)} + 2uy + v = 0, \\ \nabla_z L(x,y,z,u,v) = 4z^3 + 2ze^{(x^2+y^2+z^2)} + 2uz - v = 0, \\ x^2+y^2+z^2-200 \le 0, \\ u \ge 0, \\ u(x^2+y^2+z^2-200) = 0, \\ x+y-z = 0. \end{cases}$$