オペレーションズリサーチ　期末試験解答例

２００８年2月１２日

問題１

３ヶ所の油田 X, Y, Z から採掘した石油を、４ヶ所の発電所 A, B, C, D へ輸送したい。油田 X, Y, Z での石油の生産量は、それぞれ 4 万バレル、9 万バレル、8 万バレルである。また、発電所 A, B, C, D で必要な石油量は、それぞれ 7 万バレル、5 万バレル、5 万バレル、4 万バレルである。各油田から各発電所へ石油１万バレルを輸送するのに必要な費用は次の表にまとめた。

輸送費用	発電所 A	発電所 B	発電所 C	発電所 D
油田 X	10	13	11	6
油田 Y	7	8	5	4
油田 Z	7	10	6	3

1. 総輸送費用が最小となるような手段を求める問題を、輸送問題として定式化せよ。
2. 北西隅の方法により実行可能基底解をつくれ。
3. 2. で求めた実行可能基底解を初期解として、ネットワークを使ったシンプレックス法を実行し、最適解を求めよ。

1. i 番目の油田から j 番目の発電所へ輸送する量を x_{ij} とすると、次のように定式化ができる。

$$\begin{array}{ll}
\min & 10x_{11}+13x_{12}+11x_{13}+6x_{14}+7x_{21}+8x_{22}+5x_{23}+4x_{24} \\
& \quad +7x_{31}+10x_{32}+6x_{33}+3x_{34} \\
\text{s.t.} & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=4, \quad x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=9, \\
& x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=8, \quad x_{11}+x_{21}+x_{31}=7, \\
& x_{12}+x_{22}+x_{32}=5, \qquad x_{13}+x_{23}+x_{33}=5, \\
& x_{14}+x_{24}+x_{34}=4, \qquad x_{ij}\geq 0 \ \ (i=1,2,3,\ j=1,2,3,4).
\end{array}$$

2. 北西隅の方法では、左上から順に数値を入れていく。その結果得られる実行可能基底解は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. 基底変数 $x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34}$ に対応する枝の集合は、全域木である。この全域木に x_{31} に対応する枝を加えると、$x_{31}, x_{21}, x_{23}, x_{33}$ に対応する枝を含んだ閉路ができる。この閉路に沿って輸送量を θ 増加させると

$$(7-7+5-6)\theta$$

より、目的関数値は $-\theta$ 減少する。そして、輸送量を 3 増加させたとき、変数 x_{21} が 0 となる。つまり、x_{31} が非基底変数から基底変数に移り、x_{21} が基底変数から非基底変数に移る。
すると、新たに得られた実行可能基底解は、

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

となる。この全域木にどの枝を加えても、これ以上目的関数値を減少させることはできない。よって、これが最適解となる。このとき、目的関数値は 139 となる。

問題 2

次のように定式化できるナップザック問題について、以下の問いに答えよ。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 4x_1+9x_2+6x_3+4x_4+5x_5 \\ \text{制約条件} & 5x_1+8x_2+7x_3+4x_4+6x_5 \le 17, \\ & x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \in \{0,1\}. \end{array}$$

1. 最適値の上界と下界を求めよ。
2. このようなナップザック問題を、分枝限定法で解く事を考える。限定操作ができる状況を全て挙げよ。理解していることが伝わる程度に十分な説明をすること。

1. $\frac{9}{8} \ge \frac{4}{4} \ge \frac{6}{7} \ge \frac{5}{6} \ge \frac{4}{5}$ となるので、x_2, x_4, x_3, x_5, x_1 の順に出来るだけ値を代入する。
   上界は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(0,1,\frac{5}{7},1,0)$ のときで $\bar{z}=17\frac{2}{7}$、
   下界は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(0,1,0,1,0)$ のときで $\underline{z}=13$ となる。
2. 次の 3 つの場合がある
   - 子問題の緩和問題が実行不能、つまり子問題に実行可能解が存在しない場合
   - 子問題の緩和問題の最適解が子問題の解になっている、つまり子問題の最適解が得られた場合
   - 子問題の緩和問題の最適値（子問題の最適値の上界）が既に得られている元問題の最適値の下界よりも小さい、つまり子問題に元問題の最適解が含まれないことが判明した場合

問題 3

4 つの支店の効率性を DEA（包絡分析法）を用いて評価する。それぞれの支店の従業員数と売上高は表の通りである。なお、従業員数を入力データ、売上高を出力データと捉える。

	支店 1	支店 2	支店 3	支店 4
従業員数（人）	5	11	9	4
売上高（億円）	7	15	14	6

1. 支店 1 の（CCR モデルに基づいた）D 効率値を表す数理計画問題を書け。（説明は必要ない）
2. 入力と出力が 1 つしかないため、1. の問題はシンプレックス法などの方法に頼らなくても解くことができる。それでは、支店 1 の D 効率値を求めよ。

1. CCR モデルに基づいた支店 1 の D 効率値は、次の最適化問題の最適値である。（線形計画問題に変形した形でも良い）

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{7u}{5v} \\ \text{s.t.} \quad & \frac{7u}{5v} \le 1, \quad \frac{15u}{11v} \le 1, \\ & \frac{14u}{9v} \le 1, \quad \frac{6u}{4v} \le 1, \quad u, v \ge 0. \end{aligned}$$

2. 制約条件の最初の 4 つ不等式は、

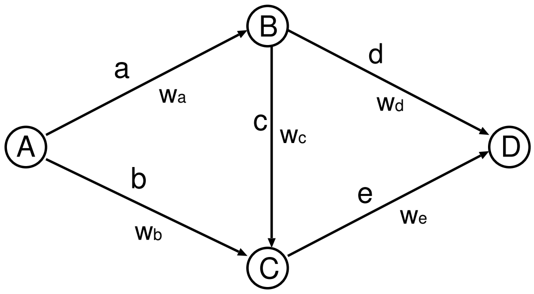
$$\frac{7u}{5v} \le 1 \Leftrightarrow \frac{u}{v} \le \frac{5}{7}, \quad \frac{15u}{11v} \le 1 \Leftrightarrow \frac{u}{v} \le \frac{11}{15}, \quad \frac{14u}{9v} \le 1 \Leftrightarrow \frac{u}{v} \le \frac{9}{14}, \quad \frac{6u}{4v} \le 1 \Leftrightarrow \frac{u}{v} \le \frac{4}{6}$$

と変形できる。これらは $\frac{u}{v} \le \frac{9}{14}$ という 1 つの不等式で置き換えることができる。

目的関数は、$\frac{7}{5}\frac{u}{v}$ の最大化なので、最適値は $\frac{7}{5}\frac{9}{14} = 0.9$ となる。

問題 4

次のような 4 つの頂点 (A, B, C, D) と 5 本の枝 (a, b, c, d, e) からなる有向グラフがある。各枝には距離 w が与えられている。



まず、次のようにベクトルを定義する。

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

すると、頂点 A から頂点 D までの最短路を求める問題は、次の整数計画問題 P として定式化することができる。以下では、頂点 A から頂点 D までの最短距離を l^* とおくことにする。

$$\text{整数計画問題 P：} \quad \begin{aligned} \min \quad & w_a x_a + w_b x_b + w_c x_c + w_d x_d + w_e x_e \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{e}_a x_a + \boldsymbol{e}_b x_b + \boldsymbol{e}_c x_c + \boldsymbol{e}_d x_d + \boldsymbol{e}_e x_e = \boldsymbol{b}, \\ & x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

1. 整数計画問題Pと次の線形計画問題Qの最適値の大小関係を述べ、その理由を説明せよ。

線形計画問題Q：
$$\begin{array}{ll} \min & w_a x_a + w_b x_b + w_c x_c + w_d x_d + w_e x_e \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{e}_a x_a + \boldsymbol{e}_b x_b + \boldsymbol{e}_c x_c + \boldsymbol{e}_d x_d + \boldsymbol{e}_e x_e = \boldsymbol{b}, \\ & x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \geq 0. \end{array}$$

2. 線形計画問題Qと次の線形計画問題Rの最適値の大小関係を述べ、その理由を説明せよ。

線形計画問題R：
$$\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{e}_a^T \boldsymbol{y} \leq w_a, \quad \boldsymbol{e}_b^T \boldsymbol{y} \leq w_b, \quad \boldsymbol{e}_c^T \boldsymbol{y} \leq w_c, \\ & \boldsymbol{e}_d^T \boldsymbol{y} \leq w_d, \quad \boldsymbol{e}_e^T \boldsymbol{y} \leq w_e. \end{array}$$

3. 次のように定義した $\widetilde{\boldsymbol{y}}$ が、線形計画問題Rの実行可能解となっていることを示せ（背理法を使うと良い）。また、線形計画問題Rの最適値と l^* の大小関係を述べ、その理由を説明せよ。

$$\widetilde{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} \text{頂点 A から頂点 A までの最短距離} \\ \text{頂点 A から頂点 B までの最短距離} \\ \text{頂点 A から頂点 C までの最短距離} \\ \text{頂点 A から頂点 D までの最短距離} \end{pmatrix}$$

4. 以上の設問を踏まえ、頂点 A から頂点 D までの最短距離 l^* が、線形計画問題QやRの最適値と等しいことを説明せよ。

1. 問題Pの最適値 $\geqq$ 問題Qの最適値
整数計画問題Pの最適解を $\boldsymbol{x}$ とする。当然、問題Pの最適値は $w_a x_a + w_b x_b + w_c x_c + w_d x_d + w_e x_e$ である。また、$\boldsymbol{x}$ は問題Pの実行可能解なので、$\boldsymbol{e}_a x_a + \boldsymbol{e}_b x_b + \boldsymbol{e}_c x_c + \boldsymbol{e}_d x_d + \boldsymbol{e}_e x_e = \boldsymbol{b}$ と $x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \in \{0, 1\}$ が満たされている。
すると、$\boldsymbol{x}$ は線形計画問題Qの全ての制約条件を満たしているため、$\boldsymbol{x}$ は問題Qの実行可能解となる。この解の目的関数値は $w_a x_a + w_b x_b + w_c x_c + w_d x_d + w_e x_e$ である。問題Qは最小化問題なので、最適値は $w_a x_a + w_b x_b + w_c x_c + w_d x_d + w_e x_e$ 以下であることがわかる。すなわち、問題Pの最適値以下になる。

2. $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} w_a & w_b & w_c & w_d & w_e \end{pmatrix}^T \in \Re^5, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_a & \boldsymbol{e}_b & \boldsymbol{e}_c & \boldsymbol{e}_d & \boldsymbol{e}_d \end{pmatrix} \in \Re^{4\times 5}$ とおく。
すると、線形計画問題Qは (1) のように書くことができる。これを、最大化にすると (2) となる。この問題の双対を取ると (3) となる。これを最大化に直すと (4) のように書ける。

$$\begin{array}{llllllll} (1) & & (2) & & (3) & & (4) & \\ \min & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} & \max & -\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} & \min & \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} & \max & \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, & \text{s.t.} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, & \text{s.t.} & \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} \geq -\boldsymbol{c}. & \text{s.t.} & \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}. \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. & & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. & & & & \end{array}$$

問題 (4) の制約条件を書き下すと、$\boldsymbol{e}_a^T \boldsymbol{y} \leq w_a,\ \boldsymbol{e}_b^T \boldsymbol{y} \leq w_b,\ \boldsymbol{e}_c^T \boldsymbol{y} \leq w_c,\ \boldsymbol{e}_d^T \boldsymbol{y} \leq w_d,\ \boldsymbol{e}_e^T \boldsymbol{y} \leq w_e$ と

なるので、これは線形計画問題Rと等しい。双対定理より、線形計画問題QとRの最適値は等しいといえる。

3. • $\widetilde{\boldsymbol{y}}$ に対する線形計画問題Rの 5 つの制約条件は、頂点 S から頂点 T へ向かう枝に対し、

$$\begin{aligned} &-\text{ 頂点 A から頂点 S までの最短距離} + \text{頂点 A から頂点 T までの最短距離} \\ &\qquad \leq \text{ 頂点 S から頂点 T への枝の距離} \end{aligned}$$

と書き表すことができる。この不等式が成り立たないと仮定する。ということは、

$$\begin{aligned} &\text{頂点 A から頂点 T までの最短距離} \\ &\qquad > \text{ 頂点 A から頂点 S までの最短距離} + \text{頂点 S から頂点 T への枝の距離} \end{aligned}$$

という不等式が成り立つ。しかし、頂点 A から頂点 S までの最短パスに頂点 S から頂点 T への枝を付け加えたパスは、頂点 A から頂点 T までのパスとなる。そして、このパスの距離は頂点 A から頂点 T までの最短距離よりも短くなり矛盾である。

よって、最初の不等式は必ず成り立ち、$\widetilde{\boldsymbol{y}}$ は線形計画問題Rの実行可能解であるといえる。

• 問題Rの最適値 $\geqq l^*$

$\widetilde{\boldsymbol{y}}$ は線形計画問題Rの実行可能解である。頂点 A から頂点 A までの最短距離は 0 であるので、目的関数値は「頂点 A から頂点 D までの最短距離」つまり l^* と一致する。問題Rは最大化問題なので、問題Rの最適値は l^* 以上になる。

4. 設問 1 から 3 より、

$$l^* = \text{問題Pの最適値} \geqq \text{問題Qの最適値} = \text{問題Rの最適値} \geqq l^*$$

が成り立つ。よって、頂点 A から頂点 D までの最短距離 l^* が、線形計画問題QやRの最適値と等しい。