オペレーションズリサーチ　　中間試験解答例

２００８年１１月２５日

問題１

次の線形計画問題について、以下の問いに答えよ。

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & z = x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 7x_5 \\
\text{制約条件} & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 10, \\
 & 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 8, \\
 & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.
\end{array}
$$

1. x_1 と x_2 が基底変数、残りが非基底変数である基底解が実行可能であること示せ。
2. 1. の実行可能基底解に対応する辞書をつくれ。
3. 2. の辞書からスタートしてシンプレックス法を行うことにより最適解を求めよ。各反復で基底に入る、または出る変数の選択理由を明記するように。

1. 非基底変数に 0 を代入して制約条件を考えると、$x_1 + x_2 = 10$ と $2x_1 - x_2 = 8$ という 2 元連立一次方程式を得る。これを解き、基底変数は $x_1 = 6,\ x_2 = 4$ であることが分かる。基底解 $(6, 4, 0, 0, 0)$ の各要素は非負であるので、実行可能である。
2. 目的関数と基底変数 x_1, x_2 を非基底変数 x_3, x_4, x_5 で表す。

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & z = 10 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \\
\text{制約条件} & x_1 = 6 - x_3 - \dfrac{2}{3}x_4 - 3x_5, \\
 & x_2 = 4 - x_3 - \dfrac{1}{3}x_4 - x_5, \\
 & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).
\end{array}
$$

3. 2. の辞書からスタートする。目的関数の中で非基底変数 x_3 にかかる係数は 2 で正なので、これを基底変数にする。x_3 を増やしていったとき、最初に 0 となる基底変数は x_2 なので、これを非基底変数とする。すると次の辞書を得る。

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & z = 18 - 2x_2 + \dfrac{1}{3}x_4 + x_5 \\
\text{制約条件} & x_1 = 2 + x_2 - \dfrac{1}{3}x_4 - 2x_5, \\
 & x_3 = 4 - x_2 - \dfrac{1}{3}x_4 - x_5, \\
 & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).
\end{array}
$$

目的関数の中で非基底変数 x_4 にかかる係数は $\frac{1}{3}$ で正なので、これを基底変数にする。x_4 を増やしていったとき、最初に 0 となる基底変数は x_1 なので、x_1 を非基底変数とする。すると次の辞書を得る。

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & z = 20 - x_1 - x_2 - x_5 \\
\text{制約条件} & x_3 = 2 + x_1 - 2x_2 + x_5 \\
& x_4 = 6 - 3x_1 + 3x_2 - 6x_5, \\
& x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).
\end{array}
$$

この辞書の目的関数において、係数が正である非基底変数は存在しない。よって、問題の最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 2, 6, 0)$ であり、そのときの最適値は 20 となる。

問題 2

$\boldsymbol{x} \in \Re^n$ が変数であり、$\boldsymbol{b} \in \Re^n$, $\boldsymbol{A} \in \Re^{n \times n}$ が定数である次の線形計画問題について考える。なお、$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T$ とする。

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & -\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}.
\end{array}
$$

1. この線形計画問題の双対問題を作れ。
2. 1. で作った問題を変形して、これが元の問題と等価であることを説明せよ。

1. スラック変数 $\boldsymbol{s}$ を導入し、不等式制約を等式制約に変更する。

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & -\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}.
\end{array}
$$

これを、標準形で記述する。

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \begin{pmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix} \\
\text{制約条件} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0}.
\end{array}
$$

この問題の双対問題は次のようになる。

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \\
\text{制約条件} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \geq \begin{pmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

この問題は次のように変形できる。

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \geq -\boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}. \end{array}$$

2. $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$ より、制約条件の $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \geq -\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{b}$ と書き換えることができる。また、目的関数を -1 倍すると、$-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ の最大化となる。こうして得られた問題は元問題と等しい。

問題３

関数 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 3xy + 4x + \log(x^2+y^2+1)$ の最小化について考える。

1. 最急降下法を適用する場合、原点 $(0,0)$ での探索方向を求めよ。
2. ニュートン法を適用する場合、原点 $(0,0)$ での探索方向を求めよ。

1.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+3y+4 \\ 4y+3x \end{pmatrix} + \frac{1}{x^2+y^2+1}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

より、点 $(0,0)$ での勾配ベクトルは $\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。よって、最急降下法の探索方向は $-\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる（定数倍していても良い）。

2.

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}\begin{pmatrix} 2(x^2+y^2+1)-4x^2 & -4xy \\ -4xy & 2(x^2+y^2+1)-4y^2 \end{pmatrix}$$

より、点 $(0,0)$ でのヘッセ行列は、$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ である。よって、ニュートン法の探索方向は $-\nabla^2 f(0,0)^{-1}\nabla f(0,0) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$ となる（定数倍していても良い）。

問題４

２次元ユークリッド空間上に、次の５つの点がある。

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_5 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

これらの５つの点を全て含み、中心 $\boldsymbol{c}$ が第一象限にある円の中で、半径 r が最も小さくなるものを知りたい。この問題は、$r \in \Re,\ \boldsymbol{c} \in \Re^2$ を変数とする次のような制約付き非線形計画問題として定式化できる。

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & r^2 \\ \text{制約条件} & (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{c})^T(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{c}) \leq r^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \\ & \boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{0}. \end{array}$$

1. この問題の KKT 条件 (最適解であるための一次の必要条件）を導出せよ。
2. 変数 r の変わりに、変数 $t\ (= r^2 - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{c})$ を導入することにより、この問題を２次計画問題に帰着せよ。答えだけ述べればよい。

1. 非線形計画問題の標準形に書き換える。

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & r^2 \\ \text{制約条件} & (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{c})^T(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{c}) - r^2 \leq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \\ & -c_i \leq 0 \quad (i = 1, 2). \end{array}$$

ラグランジュ関数は、ラグランジュ乗数 $\boldsymbol{u} \in \Re^5,\ \boldsymbol{v} \in \Re^2$ を用いて、

$$L(r, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = r^2 + \sum_{i=1}^{5} u_i((\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{c})^T(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{c}) - r^2) + \sum_{i=1}^{2} v_i(-c_i)$$

となる。よって、KKT 条件は以下のように表せる。

$$\begin{cases} \nabla_r L(r, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 2r + \displaystyle\sum_{i=1}^{5} u_i(-2r) = 0, \\ \nabla_{\boldsymbol{c}} L(r, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -2\displaystyle\sum_{i=1}^{5} u_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \\ (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{c})^T(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{c}) - r^2 \leq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \\ u_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \\ u_i((\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{c})^T(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{c}) - r^2) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \\ -c_i \leq 0 \quad (i = 1, 2), \\ v_i \geq 0 \quad (i = 1, 2), \\ v_i(-c_i) = 0 \quad (i = 1, 2). \end{cases}$$

2. 変数 r の変わりに、変数 $t = r^2 - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{c}$ を導入すると、目的関数は

$$r^2 = t + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{c}$$

と書き換えられる。また、制約条件は、

$$(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{c})^T(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{c}) \leq r^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{v}_i - 2\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{c} \leq t \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

と書き換えられる。制約条件に実際の数字を代入すると、

$$\begin{aligned}
&0 \leq t, \\
&82 - 18c_1 - 2c_2 \leq t, \\
&26 - 2c_1 - 10c_2 \leq t, \\
&89 - 10c_1 - 16c_2 \leq t, \\
&100 - 16c_1 - 12c_2 \leq t,
\end{aligned}$$

であるので、次のような 2 次計画問題となる。

$$\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} t & c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\
\text{制約条件} & \begin{pmatrix} -1 & -18 & -2 \\ -1 & -2 & -10 \\ -1 & -10 & -16 \\ -1 & -16 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -82 \\ -26 \\ -89 \\ -100 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} t \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{array}$$