オペレーションズリサーチ　期末試験解答例

２００９年2月１０日

問題１

４人の学生が２つの人文基礎科目のどちらかを受講する。全ての学生が希望する科目を選択できればよいが、各講義には２人という定員がある。そこで、学生が各人文基礎科目を受講することになったときの「満足度」を調査し、その「満足度」の和が最大になるように受講科目を割り振ることにした。

	学生A	学生B	学生C	学生D
講義１	5	7	3	4
講義２	4	3	6	2

調査の結果、満足度が表のようになったとすると、満足度を最大化する問題は次のような整数計画問題として定式化できる。このとき、以下の問いに答えよ。

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 5x_{11}+7x_{12}+3x_{13}+4x_{14}+4x_{21}+3x_{22}+6x_{23}+2x_{24} \\
\text{制約条件} & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=2, \\
 & x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=2, \\
 & x_{11}+x_{21}=1, \\
 & x_{12}+x_{22}=1, \\
 & x_{13}+x_{23}=1, \\
 & x_{14}+x_{24}=1, \\
 & x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{21},x_{22},x_{23},x_{24}\in\{0,1\}.
\end{array}
$$

1. 各変数が集合 $\{0,1\}$ に属するという条件を集合 $[0,1]$ に属すると変更することにより緩和問題を作り、その問題から各変数が１以下という制約を除いてもよい理由を述べよ。
2. １以下という制約を除いた問題に相当する輸送問題を説明せよ。
3. 2. の輸送問題をネットワークを使ったシンプレックス法で解け。初期実行可能基底解は $x_{11},x_{12},x_{13},x_{23},x_{24}$ を基底変数（全域木の枝）とせよ。
4. 3. で求めた最適解をもとに、最適な受講科目の割り振りを導き出せ。

1. $x_{21}\geq 0$ と $x_{11}+x_{21}=1$ より、$x_{11}=1-x_{21}\leq 1$ が成り立つ。同様に他の変数も必ず１以下になる。よって、１以下という制約は必要としない。
2. ２ヶ所の工場から４ヶ所の倉庫に商品を輸送する。工場の生産量は２で、倉庫の需要量は１である。各工場から各倉庫へ商品１を輸送するのに必要な費用は次の表のようになる。

	倉庫A	倉庫B	倉庫C	倉庫D
工場1	-5	-7	-3	-4
工場2	-4	-3	-6	-2

このような状況のもとで、最も輸送コストを少なくするような輸送問題に相当する。

3. 基底変数 $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}$ に対応する枝の集合は、全域木である。この全域木に x_{14} に対応する枝を加えると、$x_{14}, x_{24}, x_{23}, x_{13}$ に対応する枝を含んだ閉路ができる。この閉路に沿って輸送量を θ 増加させると

$$(-4+2-6+3)\theta$$

より、目的関数値は 5θ 減少する。そして、輸送量を 0 増加させたとき、変数 x_{13} が 0 となる。つまり、x_{14} が非基底変数から基底変数に移り、x_{13} が基底変数から非基底変数に移る。このとき、実行可能基底解は、

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

で変わらず、基底変数のみ変化することに注意する。

この全域木に x_{21} に対応する枝を加えると、$x_{21}, x_{11}, x_{14}, x_{24}$ に対応する枝を含んだ閉路ができる。この閉路に沿って輸送量を θ 増加させると

$$(-4+5-4+2)\theta$$

より、目的関数値は θ 減少する。そして、輸送量を 1 増加させたとき、変数 x_{11} が 0 となる。つまり、x_{21} が非基底変数から基底変数に移り、x_{11} が基底変数から非基底変数に移る。すると、新たに得られた実行可能基底解は、

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

となる。この全域木にどの枝を加えても、これ以上目的関数値を減少させることはできない。よって、これが最適解となる。このとき、目的関数値は 21 となる。

4. 1. で作った緩和問題の最適解が

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

であることが分かった。この問題は、緩和する前の元問題の実行可能解でもあるため、元問題の最適解にもなる。よって、最適な割り振りは次の通りである。

講義1： 学生B、学生D
講義2： 学生A、学生C

問題２

次の 0–1 計画問題を分枝限定法を使って解け。分枝操作は x_1, x_2, x_3, x_4 の順にするとよい。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ \text{制約条件} & 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 10, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}. \end{array}$$

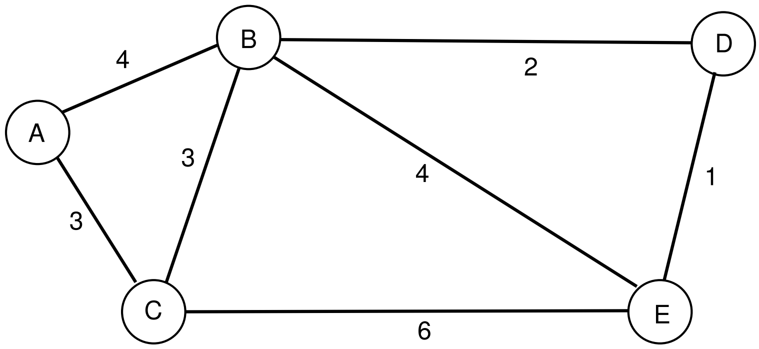
$\frac{5}{3} \geq \frac{6}{5} \geq \frac{7}{7} \geq \frac{3}{4}$ となるので、緩和問題の最適解や実行可能解を求めるときは、x_3, x_4, x_1, x_2 の順に使う。

1. 上界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, \frac{2}{7}, 1, 1)$ のときで $\bar{z} = 13$、下界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 1, 1)$ のときで $\underline{z} = 11$ となる。暫定解として $x^0 = (0, 0, 1, 1)$、$z^0 = 11$ とする。x_1 を 0 と 1 に固定した 2 つの子問題をつくる（分枝操作をする）。
2. $x_1 = 0$ と固定した場合について考える。
   上界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, \frac{2}{7}, 1, 1)$ のときで $\bar{z} = 13$、下界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 1, 1)$ のときで $\underline{z} = 11$ となる。$x_1 = 0$ とした上で、x_2 を 0 と 1 に固定した 2 つの子問題をつくる（分枝操作をする）。
3. $x_1 = 1$ と固定した場合について考える。
   上界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, \frac{3}{5})$ のときで $\bar{z} = 11\frac{3}{5}$、下界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0)$ のときで $\underline{z} = 8$ となる。$x_1 = 1$ とした上で、x_2 を 0 と 1 に固定した 2 つの子問題をつくる（分枝操作をする）。
4. $x_1 = 0, x_2 = 0$ と固定した場合について考える。
   上界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 1, 1)$ のときで $\bar{z} = 11$、下界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 1, 1)$ のときで $\underline{z} = 11$ となる。緩和問題の解が整数となるので、限定操作ができる。あるいは、上界 $\bar{z}$ が既に得られている下界 z^0 より小さいので、限定操作ができる。
5. $x_1 = 0, x_2 = 1$ と固定した場合について考える。
   上界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 0)$ のときで $\bar{z} = 12$、下界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 0)$ のときで $\underline{z} = 12$ となる。暫定解として $x^0 = (0, 1, 1, 0)$、$z^0 = 12$ とする。緩和問題の解が整数となるので、限定操作ができる。
6. $x_1 = 1, x_2 = 0$ と固定した場合について考える。
   上界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, \frac{3}{5})$ のときで $\bar{z} = 11\frac{3}{5}$、下界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0)$ のときで $\underline{z} = 8$ となる。上界 $\bar{z}$ が既に得られている下界 z^0 より小さいので、限定操作ができる。
7. $x_1 = 1, x_2 = 1$ と固定した場合について考える。
   実行可能解は存在しないので、限定操作ができる。

以上より、最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 0)$ となり、このとき最適値は 12 となる。

問題３

次のネットワークにおいて、頂点Aから頂点Eへの最短路を ダイクストラ法 により求めよ。アルゴリズムの過程は明記すること。



初期値　$S=\emptyset, \quad \boldsymbol{d}=(0,\infty,\infty,\infty,\infty), \quad \boldsymbol{P}=(?,?,?,?,?).$

反復１　$\min_{i\in\bar{S}} d(i)=d(\mathrm{A})$ より、頂点 A が確定し S に入る。

- $d(\mathrm{B})>d(\mathrm{A})+4$ より、 $d(\mathrm{B})=4, P(\mathrm{B})=\mathrm{A}$
- $d(\mathrm{C})>d(\mathrm{A})+3$ より、 $d(\mathrm{C})=3, P(\mathrm{C})=\mathrm{A}$

$S=\{\mathrm{A}\}, \quad \boldsymbol{d}=(0,4,3,\infty,\infty), \quad \boldsymbol{P}=(?,\mathrm{A},\mathrm{A},?,?).$

反復２　$\min_{i\in\bar{S}} d(i)=d(\mathrm{C})$ より、頂点 C が確定し S に入る。

- $d(\mathrm{B})\le d(\mathrm{C})+3$
- $d(\mathrm{E})>d(\mathrm{C})+6$ より、 $d(\mathrm{E})=9, P(\mathrm{E})=\mathrm{C}$

$S=\{\mathrm{A},\mathrm{C}\}, \quad \boldsymbol{d}=(0,4,3,\infty,9), \quad \boldsymbol{P}=(?,\mathrm{A},\mathrm{A},?,\mathrm{C}).$

反復３　$\min_{i\in\bar{S}} d(i)=d(\mathrm{B})$ より、頂点 B が確定し S に入る。

- $d(\mathrm{D})>d(\mathrm{B})+2$ より、 $d(\mathrm{D})=6, P(\mathrm{D})=\mathrm{B}$
- $d(\mathrm{E})>d(\mathrm{B})+4$ より、 $d(\mathrm{E})=8, P(\mathrm{E})=\mathrm{B}$

$S=\{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}\}, \quad \boldsymbol{d}=(0,4,3,6,8), \quad \boldsymbol{P}=(?,\mathrm{A},\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{B}).$

反復４　$\min_{i\in\bar{S}} d(i)=d(\mathrm{D})$ より、頂点 D が確定し S に入る。

- $d(\mathrm{E})>d(\mathrm{D})+1$ より、 $d(\mathrm{E})=7, P(\mathrm{E})=\mathrm{D}$

$S=\{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}\}, \quad \boldsymbol{d}=(0,4,3,6,7), \quad \boldsymbol{P}=(?,\mathrm{A},\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{D}).$

反復５　$\min_{i\in\bar{S}} d(i)=d(\mathrm{E})$ より、頂点 E が確定し S に入る。

$S=\{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D},\mathrm{E}\}, \quad \boldsymbol{d}=(0,4,3,6,7), \quad \boldsymbol{P}=(?,\mathrm{A},\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{D}).$

反復６　S に全ての頂点が含まれたので終了。

$P(i)$ を辿っていくことにより、題意を満たす路は、A ― B ― D ― Eで、最短距離は 7 であることが分かる。

問題 4

5 つの事業体を DEA（包絡分析法）で評価することを考える。それぞれの事業体のデータ（2 入力 2 出力）は表の通りである。

	事業体 1	事業体 2	事業体 3	事業体 4	事業体 5
入力 1	10	10	7	8	5
入力 2	5	10	10	2	2
出力 1	12	20	14	10	7
出力 2	15	15	9	16	10

1. 事業体 1 の（CCR モデルに基づいた）D 効率値を求めるための数理計画問題を記せ。
2. このデータにおける生産可能集合を述べよ。
3. 事業体 1 の D 効率値を計算したところ 0.8 であった。この事実を用い、次の活動 A・B・C が生産可能集合に入っているかどうか調べよ。必ずその理由を説明するように。

	活動 A	活動 B	活動 C
入力 1	6	12	14
入力 2	3	6	9
出力 1	12	16	20
出力 2	15	20	25

1. CCR モデルに基づいた支店 1 の D 効率値は、次の最適化問題の最適値である。（線形計画問題に変形した形でも良い）

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \frac{12u_1 + 15u_2}{10v_1 + 5v_2} \\
\text{s.t.} \quad & \frac{12u_1 + 15u_2}{10v_1 + 5v_2} \le 1, \quad \frac{20u_1 + 15u_2}{10v_1 + 10v_2} \le 1 \\
& \frac{14u_1 + 9u_2}{7v_1 + 10v_2} \le 1, \quad \frac{10u_1 + 16u_2}{8v_1 + 2v_2} \le 1 \\
& \frac{7u_1 + 10u_2}{5v_1 + 2v_2} \le 1, \quad u_1, u_2, v_1, v_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

2.

$$
\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 7 & 8 & 5 \\ 5 & 10 & 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 14 & 10 & 7 \\ 15 & 15 & 9 & 16 & 10 \end{pmatrix}
$$

としたとき、生産可能集合 P は以下のようになる。

$$
P = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \Re^{2+2} \;\middle|\; \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{X\lambda},\ \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{Y\lambda},\ \boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{0} \right\}.
$$

3. 事業体 1 の入力ベクトルを $\boldsymbol{x}_o$, 出力ベクトルを $\boldsymbol{y}_o$ とする。D 効率値が 0.8 ということは、数理計

画問題（実は線形計画問題）

$$\begin{array}{ll} \min & \theta \\ \text{s.t.} & (\theta \boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o) \in P \end{array}$$

の最適値も 0.8 となる。これは、

- $\theta \geq 0.8$ のとき、$(\theta \boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o) \in P$
- $\theta < 0.8$ のとき、$(\theta \boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o) \notin P$

を意味する。

活動A　上記の理由により、$(0.6\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o)$ は生産可能ではない。$0.6\boldsymbol{x}_o = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}_o = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$ より、活動Aは生産可能集合に入っていない。

活動B　上記の理由により、$(\frac{9}{10}\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o)$ は生産可能である。また、生産可能集合の定義を考えると、生産可能な活動の定数倍もまた生産可能である。よって、$(\frac{4}{3}\frac{9}{10}\boldsymbol{x}_o, \frac{4}{3}\boldsymbol{y}_o)$ も生産可能な活動である。$\frac{4}{3}\frac{9}{10}\boldsymbol{x}_o = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\frac{4}{3}\boldsymbol{y}_o = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \end{pmatrix}$ であるので、活動Bは生産可能集合に入っている。

活動C　上記の理由により、$(\frac{4}{5}\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o)$ は生産可能である。また、生産可能集合の定義を考えると、生産可能な活動の定数倍もまた生産可能である。よって、$(\frac{5}{3}\frac{4}{5}\boldsymbol{x}_o, \frac{5}{3}\boldsymbol{y}_o)$ も生産可能な活動である。さらに、ある生産可能な活動に対し、出力がそのままで入力が大きなものは、生産可能である。$\frac{5}{3}\frac{4}{5}\boldsymbol{x}_o \leq \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\frac{5}{3}\boldsymbol{y}_o = \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix}$ より、活動Cは生産可能である。