オペレーションズリサーチ　中間試験問題　２００９年１２月１日

解答上の注意
・すべての答案用紙に学籍番号，氏名，問題番号を忘れずに記入すること．
・n 枚目の問題用紙には問題 n の解答を書くこと $(n = 1, \ldots, 4)$.
・答えは結果のみではなく，導出過程も要領よく記述すること．
・上記注意および問題の指示に従わない解答は減点するか，採点しない．

問題１

A 君が OR の演習問題を解いていたところ，次の線形計画問題に遭遇した．

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = -x_1 - 3x_2 + \diamondsuit x_3 \\ \text{制約条件} & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 7 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{array}$$

この問題は，目的関数の x_3 の係数が不鮮明でわからない．この問題について次の問に答えよ．

1. $\diamondsuit = 2$ とした問題を標準形に変換せよ．
2. 1. の問題を 2 段階単体法で解け．
3. 解答を見たところ，最適解は 2. で求めたものと一致していた．このことから，もともと $\diamondsuit$ はどんな値であったと考えられるか．$\diamondsuit$ が取り得る範囲を求めよ．

問題２

$\boldsymbol{A} \in \Re^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \Re^m$ が与えられているとする．このとき，次の 2 つの条件

- ある $\boldsymbol{x} \in \Re^n$, $\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$ が存在して，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ を満たす．
- ある $\boldsymbol{y} \in \Re^m$ が存在して，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \ge 0$, $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} < 0$ を満たす．

のうちどちらか一方が必ず成り立ち，しかも同時に成り立つことはないということが知られている．以下の設問に従って，この命題を証明しよう．

1. 線形計画問題に対する双対定理を 45 字以内で説明せよ．
2. 線形計画問題
$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{0}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{array} \tag{1}$$
を考える．ここで $\boldsymbol{0} = (0, 0, \ldots, 0)^T \in \Re^n$ である．この問題の双対問題を作れ．
3. 問題 (1) が実行可能であるとする．このとき，双対定理を利用して $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \ge 0$, $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} < 0$ を満たす $\boldsymbol{y}$ が存在しないことを示せ．

4. 問題 (1) が実行不能であるとする．このとき，双対定理を利用して $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \geq 0$, $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} < 0$ を満たす $\boldsymbol{y}$ が存在することを示せ．

問題３

n 次元ユークリッド空間に集合 $A = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ と集合 $B = \{\boldsymbol{x}_{k+1}, \boldsymbol{x}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{k+l}\}$ がある．これら二つの集合を関数 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + b$ ($\boldsymbol{a} \in \Re^n, b \in \Re$) を用いて分けたい．すなわち，$\boldsymbol{x} \in A$ であれば $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + b > 0$, $\boldsymbol{x} \in B$ であれば $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + b < 0$ となるような $\boldsymbol{a} \in \Re^n$ と $b \in \Re$ を見つけたい．いま，2 つの集合 A と B を分ける関数が存在すると仮定する．このような関数の中でなるべく良い性質を持つものを見つけたい．

1. 集合 A, B に対応して，y_i を

$$y_i = \begin{cases} 1 & (i = 1, \ldots, k) \\ -1 & (i = k+1, \ldots, k+l) \end{cases}$$

   と定めると，2 つの集合を分ける関数 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + b$ は $y_i(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}_i + b) > 0$ $(i = 1, \ldots, k+l)$ を満たす．また，一般に集合 $H = \{\boldsymbol{x} \in \Re^n | \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + b = 0\}$ と $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ との距離は $\frac{|\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}+b|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ で与えられる．これらの事実を用いて，各点 $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, \ldots, k+l)$ と H との距離の最小値 $d(\boldsymbol{a}, b)$ を与える式を $\boldsymbol{a}, b$ および $\boldsymbol{x}_i, y_i$ $(i = 1, \ldots, k+l)$ を用いて表せ．
2. 2 つの集合を分ける関数 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + b$ を求めるとき，

$$\min_{i=1,\ldots,k+l} y_i(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}_i + b) = 1$$

   と仮定できる．この理由を簡単に説明せよ．また，この仮定の元では $d(\boldsymbol{a}, b)$ はどのようになるか．
3. $d(\boldsymbol{a}, b)$ を最大にする関数 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + b$ を求める問題を，2 次計画問題として定式化せよ．

問題４

2 階連続微分可能な関数 $f : \Re^n \to \Re$ の最小化について考える．

1. 点 $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ において最急降下法を適用する場合の探索方向 $\boldsymbol{d}_S$ を答えよ．また，$\boldsymbol{x}$ から d_S の方向に微少量進むと関数が減少すること，すなわち，十分小さい $\epsilon > 0$ に対して $f(\boldsymbol{x} + \epsilon \boldsymbol{d}_s) < f(\boldsymbol{x})$ となることを説明せよ．
2. 関数 f に対してニュートン法を適用することを考える．ニュートン法の基本的な考え方を説明し，それに基づき点 $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ における探索方向 $\boldsymbol{d}_N$ の式を導出せよ．