オペレーションズリサーチ 期末試験解答例

2011 年 2 月 1 日

問題 1

危険な道のコストを 1，安全な道のコストを 0 として (図 1 参照)，地点 1 から地点 7 までの最短路をダイクストラ法で求めれば良い．

[初期化]

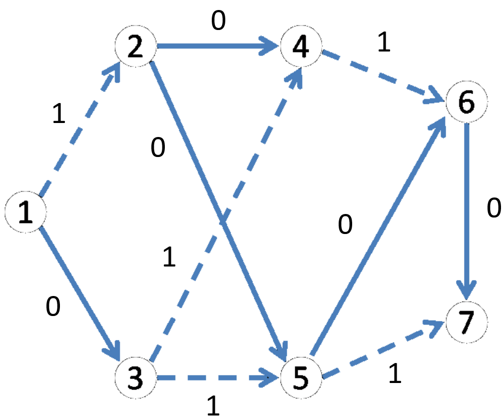

図 1　枝へのコストの割り振り

- $S = \emptyset$, $\bar{S} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $d = (0,\infty,\infty,\infty,\infty,\infty,\infty)$ $P = (0,0,0,0,0)$.

[反復 1]

- $\min_{i \in \bar{S}} d(i) = d(1)$ より $v = 1$ とする．
- $S = \{1\}$, $\bar{S} = \{2,3,4,5,6,7\}$.
  $d(2) > d(1){+}1$ より $d(2) = 1$, $P(2) = 1$ とする．
  $d(3) > d(1) + 0$ より $d(3) = 0$, $P(3) = 1$ とする．
  $d = (0,1,0,\infty,\infty,\infty,\infty)$ $P = (0,1,1,0,0,0,0)$.

[反復 2]

- $\min_{i \in \bar{S}} d(i) = d(3)$ より $v = 3$ とする．
- $S = \{1,3\}$, $\bar{S} = \{2,4,5,6,7\}$. $d(4) > d(3) + 1$ より $d(4) = 1$, $P(4) = 3$ とする．
  $d(5) > d(3) + 1$ より $d(5) = 1$, $P(5) = 3$ とする．
  $d = (0,1,0,1,1,\infty,\infty)$ $P = (0,1,1,3,3,0,0)$.

[反復 3]

- $\min_{i \in \bar{S}} d(i) = d(2)$ より $v = 2$ とする．
- $S = \{1,2,3\}$, $\bar{S} = \{4,5,6,7\}$.

[反復 4]

- $\min_{i\in\bar{S}} d(i) = d(4)$ より $v = 4$ とする．
- $S = \{1,2,3,4\},\ \bar{S} = \{5,6,7\}$.
  $d(6) > d(4) + 1$ より $d(6) = 2,\ P(6) = 4$ とする．
  $d = (0,1,0,1,1,2,\infty)\ P = (0,1,1,3,3,4,0)$.

[反復 5]

- $\min_{i\in\bar{S}} d(i) = d(5)$ より $v = 5$ とする．
- $S = \{1,2,3,4,5\},\ \bar{S} = \{6,7\}$.
  $d(6) > d(5) + 0$ より $d(6) = 1,\ P(6) = 5$ とする．
  $d(7) > d(5) + 1$ より $d(7) = 2,\ P(7) = 5$ とする．
  $d = (0,1,0,1,1,1,2)\ P = (0,1,1,3,3,5,5)$.

[反復 6]

- $\min_{i\in\bar{S}} d(i) = d(6)$ より $v = 6$ とする．
- $S = \{1,2,3,4,5,6\},\ \bar{S} = \{7\}$.
  $d(7) > d(6) + 0$ より $d(7) = 1,\ P(7) = 6$ とする．
  $d = (0,1,0,1,1,1,1)\ P = (0,1,1,3,3,5,6)$.

[反復 7]

- $\min_{i\in\bar{S}} d(i) = d(7)$ より $v = 7$ とする．
- $S = \{1,2,3,4,5,6,7\},\ \bar{S} = \emptyset$.

$\bar{S} = \emptyset$ となったので反復終了．最短路は $P(7)$ から逆にたどることにより $1 \to 3 \to 5 \to 6 \to 7$ となる．このとき通る危険な道の数は 1 である．

問題 2

1. 目的関数の係数を制約式の係数で割った値を計算すると，順に 1，8，19/3，23/4，28/5 となり，$2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1$ の順で小さくなる．このことから，緩和問題の解は $(0,1,1,\frac{1}{2},0)$ となり，このときの目的関数値は $\frac{93}{2}$ となる．また，暫定最適解 $x^0 = (0,1,1,0,0)$，暫定最適値 $z^0 = 35$ を得る．

2. $x_1 = 1$ とした問題の緩和問題の解は $(1,1,\frac{2}{3},0,0)$ であり，最適値は $\frac{95}{3}$ となる．この値は暫定最適値 $z^0 = 35$ よりも小さいので，さらに分枝をする必要がない．

3. 2 の結果より $x_1 = 0$ とわかる．$x_2 = x_5 = 1,\ x_3 = x_4 = 0$ とすると制約をちょうど満たし，目的関数値も 44 と大きい．このことを用いて分枝限定法を実行してみる．

(1) $x_5 = 1$ のとき

緩和問題の解は $(0,1,0,0,0)$，最適値は 44 となる．最適解が整数となったので，さらに分枝する必要はない．
また，暫定最適解 $x^0 \leftarrow (0,1,0,0,1)$，暫定最適値 $z^0 \leftarrow 44$ と更新する．
(2) $x_5 = x_2 = 0$ のとき
緩和問題の解は $(0,0,1,1,0)$，最適値は 42 となる．最適解が整数となったので，さらに分枝する必要はない．
(3) $x_5 = 0$ $x_2 = 1,\ x_3 = 0$ のとき
緩和問題の解は $(0,1,0,1,0)$，最適値は 39 となる．最適解が整数となったのでさらに分枝する必要はない．
(4) $x_5 = 0$ $x_2 = x_3 = 1$ のとき
制約式は $4x_4 \leq 2,\ x_4 \in \{0,1\}$ となるが，これを満たす解は $x_4 = 0$ しかない．このとき，目的関数値は 35 となる．最適解が整数となったのでさらに分枝する必要はない．

以上により，元のナップザック問題の最適解は $(0,1,0,0,1)$，最適値は 44 となる．

問題 3

1. 第 i 行の要素の幾何平均を $\bar{w}_i$ $(i = 1,2,3,4)$ とすれば，第 i 項目のウェイト w_i は $w_i = \bar{w}_i / \sum_{i=1}^4 \bar{w}_i$ で計算できる．実際に計算すると，

$$\bar{w}_1 = 1,\ \bar{w}_2 = \sqrt{2} = 1.4,\ \bar{w}_3 = 1/\sqrt{2} = 0.71,\ \bar{w}_4 = 1,\ \sum_{i=1}^{4} = 4.11$$

であり，各ウェイトは

$$w_1 = 0.24,\ w_2 = 0.34,\ w_3 = 0.17,\ w_4 = 0.24$$

となる．

2. X, Y, Z に順に 1,2,3 の番号を振ることにし，代替案 j の評価項目 i のウェイトを ζ_{ij} と書くと，代替案 j の総合ウェイト s_j は $s_j = \sum_{i=1}^4 w_i \zeta_{ij}$ で計算できる．実際に計算すると，

$$s_1 = 0.36,\ s_2 = 0.32,\ s_3 = 0.31$$

となる．よって，代替案 X を選択すべきである．

問題 4

1. DMU_1 の D 効率値を表す数理計画問題は次の通りである．

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \frac{6u_1+4u_2}{2v}, \\ \text{制約条件} & \frac{6u_1+4u_2}{2v} \leq 1, \\ & \frac{16u_1+16u_2}{4v} \leq 1, \\ & \frac{25u_1+5u_2}{5v} \leq 1, \\ & u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ v \geq 0. \end{array}$$

2. 1 の問題の分数式を約分すると次のようになる．

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \frac{3u_1+2u_2}{v}, \\ \text{制約条件} & \frac{3u_1+2u_2}{v} \leq 1, \\ & \frac{4u_1+4u_2}{v} \leq 1, \\ & \frac{5u_1+u_2}{v} \leq 1, \\ & u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ v \geq 0. \end{array}$$

目的関数や制約式の値は u_1, u_2, v を定数倍しても変わらないので，目的関数の分母を 1 と固定してよい．このことに注意し，分数式の分母を払えば，上の問題は次の線形計画問題と等価である．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 3u_1 + 2u_2, \\
\text{制約条件} & 3u_1 + 2u_2 \le 1, \\
 & 4u_1 + 4u_2 \le 1, \\
 & 5u_1 + u_2 \le 1, \\
 & u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0.
\end{array}
$$

3. どのように解いても良いが，ここでは図形的に解いてみる．2 の問題の実行可能領域を図示すると図 2 のようになる．目的関数値は 1 以下であり，実行可能解を持つからこの線形計画問題は最適解を持つ．実行可能

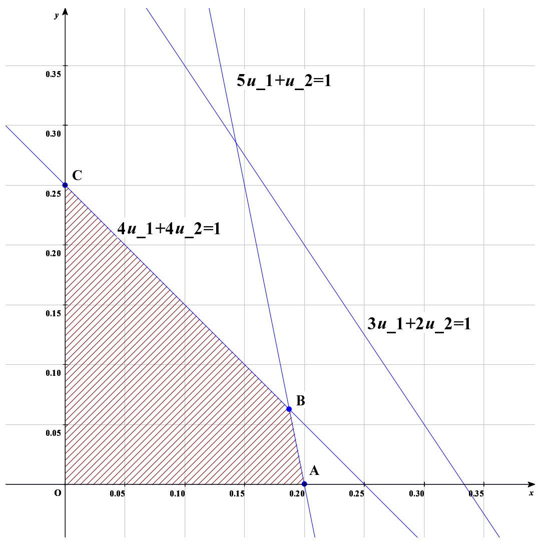

図 2　実行可能領域の図示

領域には 4 つの頂点

$$
O = (0, 0),\ A = (\frac{1}{5}, 0)\ B = (\frac{3}{16}, \frac{1}{16})\ C = (0, \frac{1}{4})
$$

があり，対応する目的関数値は

$$
0,\ \frac{3}{5},\ \frac{11}{16},\ \frac{1}{2}
$$

となる．線形計画問題が最適解を持つとき，頂点解を持つから，最適値は 4 つの頂点での最大値である．よってこの線形計画問題の最適値は $\frac{11}{16}$ であり，これが DMU_1 の D 効率値である．

4. (例) CCR モデルでは，評価される DMU が最も有利になるように各項目のウェイトを決める．そのため，効率値が 1 の DMU が続出し，相対比較がうまく行えなくなることがある．