オペレーションズリサーチ　　中間試験問題　２００８年１１月２５日

注意　・すべての答案用紙に学籍番号、氏名、問題番号を忘れずに記入すること。
　　　・答えは結果のみではなく、導出過程も要領よく記述すること。

問題１

次の線形計画問題について、以下の問いに答えよ。

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & z = x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 7x_5 \\
\text{制約条件} & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 10, \\
 & 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 8, \\
 & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.
\end{array}
$$

1. x_1 と x_2 が基底変数、残りが非基底変数である基底解が実行可能であること示せ。
2. 1. の実行可能基底解に対応する辞書をつくれ。
3. 2. の辞書からスタートしてシンプレックス法を行うことにより最適解を求めよ。各反復で基底に入る、または出る変数の選択理由を明記するように。

問題２

$\boldsymbol{x} \in \Re^n$ が変数であり、$\boldsymbol{b} \in \Re^n$, $\boldsymbol{A} \in \Re^{n\times n}$ が定数である次の線形計画問題について考える。なお、$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T$ とする。

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & -\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}.
\end{array}
$$

1. この線形計画問題の双対問題を作れ。
2. 1. で作った問題を変形して、これが元の問題と等価であることを説明せよ。

問題３

関数 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 3xy + 4x + \log(x^2 + y^2 + 1)$ の最小化について考える。

1. 最急降下法を適用する場合、原点 $(0,0)$ での探索方向を求めよ。
2. ニュートン法を適用する場合、原点 $(0,0)$ での探索方向を求めよ。

裏へ続く

問題 4

2 次元ユークリッド空間上に、次の 5 つの点がある。

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_5 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

これらの 5 つの点を全て含み、中心 $\boldsymbol{c}$ が第一象限にある円の中で、半径 r が最も小さくなるものを知りたい。この問題は、$r \in \Re,\ \boldsymbol{c} \in \Re^2$ を変数とする次のような制約付き非線形計画問題として定式化できる。

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & r^2 \\ \text{制約条件} & (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{c})^T(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{c}) \le r^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \\ & \boldsymbol{c} \ge \boldsymbol{0}. \end{array}$$

1. この問題の KKT 条件 (最適解であるための一次の必要条件）を導出せよ。
2. 変数 r の変わりに、変数 $t\ (= r^2 - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{c})$ を導入することにより、この問題を 2 次計画問題に帰着せよ。答えだけ述べればよい。