数理工学第一　　中間試験問題　２００２年6月３日

略解

問題１

==

1. 命題 p と命題 q の関係式 $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$ を証明せよ。
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ が成り立つことを示せ。
3. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ が成り立つことを示せ。

==

1. 真偽表を書くと、

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

よって、 $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$ が成り立つ

2.

$$
\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ あるいは } x \in B \cap C \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ あるいは } (x \in B \text{ かつ } x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ あるいは } x \in B) \text{ かつ } (x \in A \text{ あるいは } x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ かつ } x \in A \cup C \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}
$$

よって、 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ が成り立つ。

3.

$$
A \Delta B \equiv (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
(A \Delta B)^c &= ((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))^c \\
&= (A^c \cup B) \cap (B^c \cup A) \qquad \text{(ド・モルガンの法則)} \\
&= (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap A) \cup (B \cap B^c) \cup (B \cap A) \\
&= (A^c \cap B^c) \cup (B \cap A)
\end{aligned} \tag{2}
$$

(1), (2) を用いて、

$$
\begin{aligned}
(A\Delta B)\Delta C &= ((A\Delta B)\cap C^c)\cup(C\cap(A\Delta B)^c)\\
&= (((A\cap B^c)\cup(B\cap A^c))\cap C^c)\cup(C\cap((A^c\cap B^c)\cup(B\cap A)))\\
&= (A\cap B^c\cap C^c)\cup(B\cap A^c\cap C^c)\cup(C\cap A^c\cap B^c)\cup(C\cap B\cap A)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A\Delta(B\Delta C) &= (A\cap((B^c\cap C^c)\cup(C\cap B))\cup(((B\cap C^c)\cup(C\cap B^c))\cap A^c)\\
&= (A\cap B^c\cap C^c)\cup(A\cap C\cap B)\cup(B\cap C^c\cap A^c)\cup(C\cap B^c\cap A^c)
\end{aligned}
$$

よって、 $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ が成り立つ。

問題２

==

$f: A\to B$ を写像、$(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を A の部分集合族とする。このとき、

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \subset f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(P_\lambda))$$

が成り立つことを示せ。

==

$$
\begin{aligned}
x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}P_\lambda &\Leftrightarrow \forall\lambda\in\Lambda,\quad x\in P_\lambda\\
&\Rightarrow \forall\lambda\in\Lambda,\quad f(x)\in f(P_\lambda)\\
&\Leftrightarrow f(x)\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}f(P_\lambda)\\
&\Leftrightarrow x\in f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}f(P_\lambda))
\end{aligned}
$$

よって、$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \subset f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(P_\lambda))$ が証明された。

問題３

==

自然数の集合を $\mathcal{N}$、整数の集合を $\mathcal{Z}$、実数の集合を $\Re$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

1. $\mathcal{N}$ から $\Re$ への単射であり全射ではない写像を１つ挙げよ。
2. $\Re$ から $\mathcal{Z}$ への全射であり単射ではない写像を１つ挙げよ。
3. $\mathcal{Z}$ から $\mathcal{N}$ への全単射 (つまり一対一対応) である写像を１つ挙げよ。

==

1. $f(x) = x$

2. $f(x) = [x]$ 　　　　　($[x]$ はガウス記号で、x を越えない最大の整数を意味する)

3. $f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 2x & (x > 0) \\ -2x + 1 & (x < 0) \end{cases}$

問題 4

==

要素がゼロでない 2 次元の実数ベクトルの集合を A とする。A の 2 つの元

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad (\text{ただし } x_1, x_2, y_1, y_2 \neq 0)$$

に対し、$x_1 y_2 = x_2 y_1$ が成り立つとき $\boldsymbol{x} R \boldsymbol{y}$ として、集合 A における関係 R を定義する。このとき、関係 R が同値関係であることを証明せよ。

==

以下で、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ は集合 A の要素であり、

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad (\text{ただし } x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \neq 0)$$

とする。

反射律： $\forall \boldsymbol{x} \in A$ に対し、$x_1 x_2 = x_2 x_1$ が成り立つので $\boldsymbol{x} R \boldsymbol{x}$

対称律： $\boldsymbol{x} R \boldsymbol{y}$ とする。このとき、$x_1 y_2 = x_2 y_1$ という関係式より、$y_1 x_2 = y_2 x_1$ が成立する。よって、$\boldsymbol{y} R \boldsymbol{x}$ となる。

推移律： $\boldsymbol{x} R \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y} R \boldsymbol{z}$ とする。このとき、$x_1 y_2 = x_2 y_1$, $y_1 z_2 = y_2 z_1$ という関係式より、$x_1 z_2 = x_1 \dfrac{y_2 z_1}{y_1} = \dfrac{x_2 y_1 z_1}{y_1} = x_2 z_1$ が成立する。よって、$\boldsymbol{x} R \boldsymbol{z}$ である。

反射律、対称律、推移律が成り立つので同値関係である。