数理工学第一　　期末試験問題２００２年7月２９日

略解

問題１

==

集合 $S = \{(x, y) \ : \ |x| < 1, |y| < 1\}$ と、関数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ について考える。

1. S が開集合であることを示せ。
2. f が凸関数であることを示せ。
3. 集合 $\{f(x, y) \ : \ (x, y) \in S\}$ の最大元・上界・上限を示せ。もし存在しなければその理由を簡単に述べよ。

==

1. 任意の $(x, y) \in S$ に対し、$\varepsilon_1 = 1 - |x|$, $\varepsilon_2 = 1 - |y|$ とおくと、集合 S の定義より、$\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ である。ここで、$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ に対し、(x, y) の ε 近傍は集合 S に含まれる。よって、S は開集合である。
2. 任意の $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$ と、任意の $\alpha \in [0, 1]$ に対し、
$$\begin{aligned} &\alpha f(x_1, y_1) + (1-\alpha) f(x_2, y_2) - f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2) \\ &= \alpha(1-\alpha)\left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right) \geq 0 \end{aligned}$$
が成り立つ。よって、f は凸関数である。
3. 上界： 2 以上の実数,　上限： 2,　最大元は存在しない。
$(x, y) \in S$ に対し $f(x, y) < 2$ であるので、最大元 z が存在するとすれば $z < 2$ である。ここで $\varepsilon = 2 - z > 0$ と定義し、$x = y = 1 - \varepsilon/4$ とすれば、$f(x, y) = 2 - \varepsilon + \varepsilon^2/8 > z$ となり、z が最大元であることに矛盾する。よって、最大元は存在しない。

問題２

==

X を空でない集合とし、d を X 上で定義された距離関数とする。a を X のある元としたとき、写像 $f : X \to \Re$ を $f(x) = d(x, a)$ で定義する。このとき f が連続写像であることを証明せよ。ただし、$\Re$ 上では通常の距離（差の絶対値）をとる。

==

d は X 上で定義された距離関数であるため、任意の $x, y, z \in X$ に対し、$d(x,y) = d(y,x)$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ が成り立つ。この関係より以下の不等式を得る。

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y).$$

この不等式を使うと、任意の $\bar{x} \in X$ において次のことが成り立つ。任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$\delta = \varepsilon > 0$ とおくと、$d(x,\bar{x}) < \delta$ を満たす任意の $x \in X$ に関し、

$$|f(x) - f(\bar{x})| = |d(x,a) - d(\bar{x},a)| \leq d(x,\bar{x}) < \delta = \varepsilon.$$

よって、f は $\bar{x}$ で連続である。任意の $\bar{x} \in X$ において f は連続であるため、f は連続写像であることが証明された。

問題３

==

2 次元のベクトル空間 $\Re^2$ の部分集合として $C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Re^2 \ : \ 0 \leq x, \ 0 \leq y \right\}$ を取る。そして、任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \Re^2$ に対し、$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in C$ であるとき $\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{a}$ と書く。すると、関係 $\leq$ は $\Re^2$ における順序関係となる。このとき、以下の問いに答えよ。

1. 集合 C が凸錐であることを示せ。
2. $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Re^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ 0 \leq x \right\}$ とするとき、W の全ての極大元ならびに極小元を求めよ。（答えだけで良い）

==

1. まず、集合 C が錐であることを示す。これは、集合 C の任意のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を α 倍 $(\alpha \geq 0)$ したベクトル $\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$ が C に含まれることを示せば良い。仮定より $x \geq 0, \ y \geq 0$ であるため、$\alpha x \geq 0, \ \alpha y \geq 0$ が成り立つ。よって、このベクトルは集合 C に含まれる。
   次に、C が凸集合であることを示す。これは、任意の $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in C$ と任意の $\alpha \in [0,1]$ に対し、$\begin{pmatrix} \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \\ \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \end{pmatrix}$ が集合 C に含まれる事を示せばよい。仮定より $x_1, \ y_1, \ x_2, \ y_2, \ \alpha, \ 1-\alpha \geq 0$ であるため、 $\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \geq 0, \ \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \geq 0$ が成り立つ。よって、このベクトルは集合 C に含まれる。

2. 極大元： $x^2 + y^2 = 1, \ 0 \leq x, \ 0 \leq y$ を満たす任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Re^2$,

   極小元： $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

問題4

==
　$S = \{1,2,3,4\}$ とする。また、任意の $a, b \in S$ に対し、$a * b$ を a と b の積を 5 で割った余りと定義する。このとき、S は $*$ を算法として可換群をなすことを証明せよ。
==

　以下で使用する記号"×" は、整数の通常のかけ算を意味する。

結合則

任意の $a, b, c \in S$ に対し、$(a * b) * c = a * (b * c)$ を示す。算法 $*$ の定義より、$a \times b = 5k_1 + a * b$ を満たす整数 k_1 が存在する。同様に、$(a * b) \times c = 5k_2 + (a * b) * c$ を満たす整数 k_2 が存在する。このとき、

$$\begin{aligned}(a \times b) \times c &= (5k_1 + a * b) \times c \\ &= 5k_1 c + (a * b) \times c \\ &= 5k_1 c + 5k_2 + (a * b) * c\end{aligned}$$

が成り立つため、k_1, k_2, c は整数であることを考慮すると、$(a * b) * c$ は $a \times b \times c$ を 5 で割った余りと等しいことが分かる。同様にして、$a * (b * c)$ は $a \times b \times c$ を 5 で割った余りと等しいことが証明できる。以上より、$(a * b) * c = a * (b * c)$ が成り立つ。

単位元の存在

任意の $a \in S$ に対し、$a * 1 = 1 * a = a$ である。つまり 1 が単位元である。

逆元の存在

$1 * 1 = 1,\ 2 * 3 = 3 * 2 = 1,\ 4 * 4 = 1$ より、1 の逆元は 1, 2 の逆元は 3, 3 の逆元は 2, 4 の逆元は 4 である。

可換性

整数の積の可換性 $(a \times b = b \times a)$ と算法 $*$ の定義より、任意の $a, b \in S$ に対し $x * y = y * x$ が成り立つ。

以上より、S は $*$ を算法として可換群をなすといえる。