数理工学第一　　中間試験問題　　２００３年6月３日

略解

問題１

1. 命題 p と命題 q の関係式 $p \wedge \neg q \equiv \neg(p \to q)$ を証明せよ。
2. $P(x,y)$ を命題関数とする。次の中で正しい推論を選び、理由を簡単に述べよ。
   - $\exists x, \forall y,\ P(x,y) \quad \Rightarrow \quad \forall y, \exists x,\ P(x,y)$
   - $\forall x, \exists y,\ P(x,y) \quad \Rightarrow \quad \exists y, \forall x,\ P(x,y)$

---

1. 真偽表を書くと、

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \to q$	$\neg(p \to q)$
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	T
F	T	F	F	T	F
F	F	T	F	T	F

   よって、 $p \wedge \neg q \equiv \neg(p \to q)$ が成り立つ

2. $\exists x, \forall y,\ P(x,y) \quad \Rightarrow \quad \forall y, \exists x,\ P(x,y)$ が正しい推論
   左辺では、ある x が存在して $\forall y,\ P(x,y)$ である。この x を $\bar{x}$ とすると、全ての y に対して $P(\bar{x},y)$ が成り立つ。このとき右辺では、任意の y に対し、x として $\bar{x}$ を持ってくると $P(x,y)$ が成り立つ。よって、正しい推論である。
   一方、 $\forall x, \exists y,\ P(x,y) \ \Rightarrow \ \exists y, \forall x,\ P(x,y)$ は正しくない。例えば、x, y を実数として $P(x,y)$ を $x = y$ とする。このとき、 $\forall x, \exists y, P(x,y)$ は、任意の x に対し x と等しい y を取ることにより成り立つが、 $\exists y, \forall x, P(x,y)$ はどんな y を持ってきても x として例えば $y+1$ を取ってきたときに成り立たない。

問題２

1. $A^c \supset B - (B \cap A)$ が成り立つことを示せ。
2. $f : A \to B$ を写像とし、P, Q はそれぞれ A, B の部分集合とする。f が全射ならば $f(P) \cup Q = f(P \cup f^{-1}(Q))$ となることを示せ。

1.

$$
\begin{aligned}
x \in B-(B\cap A) \quad &\Leftrightarrow \quad x \in B \text{ かつ } x \in (B\cap A)^c \\
&\Leftrightarrow \quad x \in B \text{ かつ } x \in (B^c \cup A^c) \qquad\qquad \text{ドモルガンの法則} \\
&\Leftrightarrow \quad (x \in B \text{ かつ } x \in B^c) \text{ あるいは } (x \in B \text{ かつ } x \in A^c) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{分配法則} \\
&\Leftrightarrow \quad x \in B \text{ かつ } x \in A^c \\
&\Rightarrow \quad x \in A^c
\end{aligned}
$$

よって、$A^c \supset B-(B\cap A)$ が成り立つ。

2.

$$
\begin{aligned}
y \in f(P)\cup Q \quad &\Leftrightarrow \quad y \in f(P) \text{ あるいは } y \in Q \\
&\Leftrightarrow \quad {}^{\exists}x,\ x \in P,\ f(x)=y \\
&\qquad\ \text{あるいは } {}^{\exists}x,\ x \in f^{-1}(Q),\ f(x)=y \qquad\qquad (\Rightarrow \text{ は全射より}) \\
&\Leftrightarrow \quad {}^{\exists}x,\ (x \in P \text{ あるいは } x \in f^{-1}(Q)),\ f(x)=y \\
&\Leftrightarrow \quad {}^{\exists}x,\ x \in P\cup f^{-1}(Q),\ f(x)=y \\
&\Leftrightarrow \quad y \in f(P\cup f^{-1}(Q))
\end{aligned}
$$

よって、f が全射のとき $f(P)\cup Q = f(P\cup f^{-1}(Q))$ が成り立つ。

問題３

$\Re$ から $\Re$ への写像 f を $f(x)=x^2$ と定める。また、自然数 n に対し集合 P_n と Q_n を $P_n=\{x\in\Re \mid -2^{-n}<x<n\}$, $Q_n=\{x\in\Re \mid -3+\dfrac{1}{n}\le x\le 3+\dfrac{1}{n}\}$ とおく。

1. $P=\bigcap_{n=1}^{\infty}P_n,\ Q=\bigcup_{n=1}^{\infty}Q_n$ とする。このとき P,Q を求めよ（答えだけで良い）。
2. $f^{-1}(f(P)),\ \ f(f^{-1}(Q))$ を求めよ。

---

1. $P=\{\boldsymbol{x}\in\Re \mid 0\le x<1\},\ Q=\{\boldsymbol{x}\in\Re \mid -3<x\le 4\}$
（境界部分を含むか含まないかに注意を要する。）

2. $f(P)=\{\boldsymbol{x}\in\Re \mid 0\le x<1\}$ より $f^{-1}(f(P))=\{\boldsymbol{x}\in\Re \mid -1<x<1\}$。
$f^{-1}(Q)=\{\boldsymbol{x}\in\Re \mid 0\le x\le 2\}$ より $f(f^{-1}(Q))=\{\boldsymbol{x}\in\Re \mid 0\le x\le 4\}$。

問題 4

2 次元の実数ベクトルの集合を $\Re^2$ とする。A の 2 つの元 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対し、 $y_1 - x_1 \leq x_2 - y_2 \leq x_1 - y_1$ が成り立つとき $\boldsymbol{x}O\boldsymbol{y}$ として、集合 $\Re^2$ における関係 O を定義する。

1. 順序の公理を述べよ。
2. 上記の O が順序関係であることを示せ。

1.
   反射律: $\quad {}^\forall\boldsymbol{x} \in \Re^2,\ \ \boldsymbol{x}O\boldsymbol{x},$
   反対称律: ${}^\forall\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Re^2,\ \boldsymbol{x}O\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}O\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y},$
   推移律: $\quad {}^\forall\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \Re^2,\ \boldsymbol{x}O\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}O\boldsymbol{z} \Rightarrow \boldsymbol{x}O\boldsymbol{z}.$

2. **反射律：**$\forall\boldsymbol{x} \in \Re^2$ に対し、 $x_1 - x_1 \leq x_2 - x_2 \leq x_1 - x_1$ が成り立つので $\boldsymbol{x}O\boldsymbol{x}$

   反対称律：$\boldsymbol{x}O\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}O\boldsymbol{x}$ とする。このとき、

   $$y_1 - x_1 \leq x_2 - y_2 \leq x_1 - y_1, \quad x_1 - y_1 \leq y_2 - x_2 \leq y_1 - x_1$$

   という関係が成り立つ。この不等式を組み合わせると、全ての不等号は等号で成り立つことがわかる。このとき、$y_1 - x_1 = x_1 - y_1$ から $x_1 = y_1$、$y_2 - x_2 = x_2 - y_2$ から $x_2 = y_2$ がいえる。よって、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ となる。

   推移律：$\boldsymbol{x}O\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}O\boldsymbol{z}$ とする。このとき、

   $$\begin{aligned} y_1 - x_1 \leq x_2 - y_2 \leq x_1 - y_1, \\ z_1 - y_1 \leq y_2 - z_2 \leq y_1 - z_1 \end{aligned}$$

   という不等式が成り立つ。上下の不等式を足すと、$z_1 - x_1 \leq x_2 - z_2 \leq x_1 - z_1$ が成立する。よって、$\boldsymbol{x}O\boldsymbol{z}$ である。

   反射律、反対称律、推移律が成り立つので順序関係である。