数理工学第一　中間試験問題　２００４年６月１日

略解

問題１

1. 命題 p と命題 q と命題 r からなる複合命題 $(p \vee q) \wedge \neg(q \wedge r)$ の真偽表を書け。
2. 命題関数 $P(x), Q(x)$ が与えられている。以下の中から、命題 $\forall x,\ P(x) \rightarrow Q(x)$ の否定となっているものを全て選び、その理由を簡単に述べよ。

- $\forall x,\ \neg P(x) \wedge Q(x)$
- $\forall x,\ P(x) \vee \neg Q(x)$
- $\exists x,\ P(x) \wedge \neg Q(x)$
- $\exists x,\ \neg P(x) \vee Q(x)$

---

1. 真偽表は以下の通り。

p	q	r	$p \vee q$	$q \wedge r$	$\neg(q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge \neg(q \wedge r)$
T	T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	F	T	T
T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T	F
F	F	F	F	F	T	F

2. ド・モルガンの法則より、$\neg(\forall x,\ P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \exists x,\ \neg(P(x) \rightarrow Q(x))$ である。また x を一つ定めれば、真偽表を書くことにより、$\neg(P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv P(x) \wedge \neg Q(x)$ であることが確認できる。よって、

$$\neg(\forall x,\ P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \exists x,\ P(x) \wedge \neg Q(x)$$

となる。$\exists x,\ P(x) \wedge \neg Q(x)$ 以外のものが否定となっていないことは、反例を挙げることにより確認できる。

問題 2

1. $f : A \to B$ を写像とし、P_1, P_2 は A の部分集合とする。このとき、
   $f(P_1 - P_2) \subset f(P_1 \cup P_2) \cap f(A - P_2)$　となることを示せ。

2. A の部分集合族 $\{P_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ に対して、　$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} P_n \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} P_n$　となることを示せ。

1.

$$
\begin{aligned}
\forall y \in f(P_1 - P_2) \quad &\Longrightarrow \quad \exists x_1 \in P_1 - P_2,\ f(x_1) = y \\
&\Longrightarrow \quad x_1 \in P_1 \ \wedge \ x_1 \notin P_2,\ f(x_1) = y \\
&\Longrightarrow \quad x_1 \in P_1 \cup P_2 \ \wedge \ x_1 \in A - P_2,\ f(x_1) = y \\
&\Longrightarrow \quad y \in f(P_1 \cup P_2) \ \wedge \ y \in f(A - P_2) \\
&\Longrightarrow \quad y \in f(P_1 \cup P_2) \cap f(A - P_2)
\end{aligned}
$$

よって、 $f(P_1 - P_2) \subset f(P_1 \cup P_2) \cap f(A - P_2)$ が証明された。

2. 集合族の定義に従うと、次のように言い換えることができる。

$$
\begin{aligned}
x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} P_n \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathcal{N},\ x \in \bigcap_{n=k}^{\infty} P_n \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathcal{N},\ \forall n \in \{k, k+1, k+2, \cdots\},\ x \in P_n \qquad \cdots\cdots\ (1) \\
x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} P_n \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall k \in \mathcal{N},\ x \in \bigcup_{n=k}^{\infty} P_n \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall k \in \mathcal{N},\ \exists n \in \{k, k+1, k+2, \cdots\},\ x \in P_n \qquad \cdots\cdots\ (2)
\end{aligned}
$$

$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} P_n$ と仮定する。このとき (1) より、ある $\bar{k} \in \mathcal{N}$ が存在して、$x \in P_{\bar{k}},\ x \in P_{\bar{k}+1}, \cdots$ である。よって、$\forall k \in \mathcal{N}$ に対し、$\bar{n} = \max\{\bar{k},\ k\}$ を持ってくると、$x \in P_{\bar{n}}$ かつ $\bar{n} \in \{k, k+1, k+2, \cdots\}$ となる。つまり、(2) が成り立つことが証明できる。これは $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} P_n$ を意味しているので、題意は証明された。

問題 3

$\Re$ から $\Re$ への写像 f を $f(x) = |1 - x| - 1$ として定める。$\Re$ の任意の元 x と y に対し、$f \circ f(x) - f \circ f(y) = 0$ が成り立つとき xTy として関係 T を定義する。このとき次の問いに答えよ。

1. 合成写像 $f \circ f$ が単射であるかどうか、ならびに全射であるかどうかを理由を付けて答えよ。

2. 関係 T が $\Re$ における同値関係となることを示せ。

3. 元 1 の同値類を求めよ。

---

1. $f\circ f(0)=f\circ f(2)=0$ より単射ではない。$f(\Re)=\{x\in\Re|x\geq -1\}$ より、$f\circ f(x)=-2$ を満たす x は存在せず、よって全射ではない。

2. **反射律：** $\forall x\in\Re$ に対し、$f\circ f(x)-f\circ f(x)=0$ が成り立つので xTx。

   対称律： xTy とすると $f\circ f(x)-f\circ f(y)=0$ という関係が成り立つ。-1 倍することより、$f\circ f(y)-f\circ f(x)=0$ が導かれる。よって、yTx となる。

   推移律： $xTy,\ yTz$ とすると、$f\circ f(x)-f\circ f(y)=0, f\circ f(y)-f\circ f(z)=0$ という関係が成り立つ。2 つの式の両辺を足し合わせることにより、$f\circ f(x)-f\circ f(z)=0$ が導かれる。よって、xTz である。

   反射律、対称律、推移律が成り立つので同値関係である。

3. $f\circ f(1)-f\circ f(x)=0$ を満たす x が同値類である。つまり、方程式 $f\circ f(x)=1$ の解を求めれば良い。よって、元 1 の同値類 $C(1)$ は $C(1)=\{-3,1,5\}$ である。

問題 4

実数全体の集合において、その部分集合 $M=\left\{\dfrac{2+\cos n}{2+n}\;\middle|\; n=0,1,2,\cdots\right\}$ を考える。部分集合 M の最小元と下限はどのようであるか、定義に基づいて説明せよ。

最小元： $\forall x\in M$ に対し、$a\leq x$ となるような $a\in M$ が最小元である。任意の M の元 $\dfrac{2+\cos n}{2+n}$ に対し、$n'=3(n+2)$ とすると $\dfrac{2+\cos n'}{2+n'}\leq\dfrac{3}{2+n'}<\dfrac{1}{2+n}\leq\dfrac{2+\cos n}{2+n}$ より、これより小さな元が存在することがわかる。よって、最小元は存在しない。

下限： 下限とは下界の中で最大の元である。下界とは、$\forall x\in M$ に対し $a\leq x$ となるような $a\in\Re$ の集合である。本問の M の下界は $\{x\in\Re\mid x\leq 0\}$ となる。なぜなら、

- $\forall n=0,1,2,\cdots$ に対し、$\dfrac{2+\cos n}{2+n}>0$ であるから、0 以下の実数は下界に含まれる
- $\forall a>0$ に対し、$n=[3/a]$ （$3/a$ を越えない最大の整数）とすると、$\dfrac{2+\cos n}{2+n}\leq\dfrac{3}{2+n}<a$ より、a は下界に含まれない

からである。下界の中の最大元は 0 であるので、下限は 0 である。