数理工学第一 期末試験問題

平成１７年８月２日

略解

問題 I. $\boldsymbol{a} = (2,0)^T \in \mathbb{R}^2$ と $A = \{\,(x_1,x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1x_2 = 0\,\} \subseteq \mathbb{R}^2$ を考える．

この 2 次元空間がユークリッド空間（つまり通常の空間）である場合，次の 1 と 2 に答えよ．

1. $\boldsymbol{a}$ は A の内点かどうか，定義に基づいて答えよ．
2. A の境界は具体的にどのような集合か答えよ．(答えだけで良い)

2 次元空間として，距離関数が $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} |x_1-y_1| & (x_2 = y_2) \\ |x_1-y_1|+1 & (x_2 \neq y_2) \end{cases}$ と定義される距離空間をとる場合，次の 3 と 4 に答えよ．なお $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が距離関数であることは証明しなくてよい．

3. $\boldsymbol{a}$ は A の内点かどうか，定義に基づいて答えよ．
4. A の境界は具体的にどのような集合か答えよ．(答えだけで良い)

---

1. 任意の $r>0$ に対し、点 $(2,\frac{r}{2})$ は $B(\boldsymbol{a},r)$ に含まれ、A に含まれない点である。よって、$B(\boldsymbol{a},r) \subseteq A$ を満たすような $r>0$ は存在しない。つまり、$\boldsymbol{a}$ は A の内点ではない。
2. $A^b = \{\,(x_1,x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1x_2 = 0\,\}$.
   なお、$A^i = \emptyset$, $A^e = \{\,(x_1,x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1x_2 \neq 0\,\}$ である。
3. $r = \frac{1}{2}$ とすると、$B(\boldsymbol{a},r) = \{\,(x_1,x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0, \frac{3}{2} \leq x_1 \leq \frac{5}{2}\,\}$ となる。$B(\boldsymbol{a},r) \subseteq A$ を満たすので、$\boldsymbol{a}$ は A の内点である。
4. $A^b = \{\,(x_1,x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0, x_2 \neq 0\,\}$.
   なお、$A^i = \{\,(x_1,x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\,\}$, $A^e = \{\,(x_1,x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1x_2 \neq 0\,\}$ である。

問題 II.

1. 4 つの要素からなる集合 $S = \{a,b,c,d\}$ において，部分集合系
   $$\mathcal{D} = \big\{\{a,d\},\{b\},\{a,c,d\},\{c\},S\big\}$$
   は位相とはならない．これに 3 つの部分集合を加えることで位相にせよ．(答えだけで良い)
2. 位相空間における点列の収束および写像の連続の定義を述べよ．

---

1. $\emptyset,\ \{b,c\},\ \{a,b,d\}$

2. **点列の収束** 位相空間 $(\mathcal{S},\mathcal{D})$ 上で点列 $\{x_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ が $\bar{x}$ に収束するとは、$\bar{x}$ を含む任意の開集合 $O\in\mathcal{D}$ に対し、適当な番号 n_o をとれば、

$$k \geq n_o \ \Rightarrow \ x_k \in O$$

が成り立つことである。

写像の連続 位相空間 $(\mathcal{S}_1,\mathcal{D}_1)$ から位相空間 $(\mathcal{S}_2,\mathcal{D}_2)$ への写像 f が連続であるとは、任意の $a\in\mathcal{S}_1$ に対し、$f(a)$ の任意の開近傍 $V_2\in\mathcal{D}_2$ を考えたとき、a の開近傍 $V_1\in\mathcal{D}_1$ が存在し

$$f(V_1)\subset V_2$$

が成り立つことである。

問題 III.

1. $M=\{\,(x_1,x_2,x_3)^T\in\mathbb{R}^3\,|\,x_1\geq\sqrt{x_2^2+x_3^2}\,\}\subseteq\mathbb{R}^3$ が凸錐であることを示せ.
ただし，不等式 $\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$ が成り立つことを使って良い.

2. 関数 $f(x)=x\sin x$ が凸関数でないことを示せ.

---

1. 凸集合であることと、錐であることを示せば良い。

- 凸集合であることを証明する。
任意の $(x_1,x_2,x_3)^T,(y_1,y_2,y_3)^T\in M$ において、その凸結合

$$\alpha\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+(1-\alpha)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1+(1-\alpha)y_1\\\alpha x_2+(1-\alpha)y_2\\x\alpha x_3+(1-\alpha)y_3\end{pmatrix}\quad(\text{ただし}\alpha\in[0,1])$$

が、M に含まれることを示せば良い。

$$\begin{aligned}&\sqrt{(\alpha x_2+(1-\alpha)y_2))^2+(\alpha x_3+(1-\alpha)y_3))^2}\\&=\sqrt{\alpha^2(x_2^2+x_3^2)+(1-\alpha)^2(y_2^2+y_3^2)+2\alpha(1-\alpha)(x_2y_2+x_3y)}\\&\leq\sqrt{\alpha^2(x_2^2+x_3^2)+(1-\alpha)^2(y_2^2+y_3^2)+2\alpha(1-\alpha)\sqrt{x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_2^2+y_3^2}}\\&=\sqrt{(\alpha\sqrt{x_2^2+x_3^2}+(1-\alpha)\sqrt{y_2^2+y_3^2})^2}\\&=\alpha\sqrt{x_2^2+x_3^2}+(1-\alpha)\sqrt{y_2^2+y_3^2}\qquad(\text{括弧の中は非負より})\\&\leq\alpha x_1+(1-\alpha)y_1\qquad((x_1,x_2,x_3)^T,(y_1,y_2,y_3)^T\in M\ \text{より}).\end{aligned}$$

よって、この凸結合は M に含まれることが分かる。以上より、M は凸集合である。

- 錐であることを示す。
任意の $(x_1,x_2,x_3)^T\in M$ と $\alpha\geq 0$ に対し、

$$\alpha\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1\\\alpha x_2\\\alpha x_3\end{pmatrix}$$

が M に含まれることを示せば良い。

$$\begin{array}{rcll} \alpha x_1 & \geq & \alpha\sqrt{x_2^2+x_3^2} & (\alpha は非負で (x_1,x_2,x_3)^T \in M より) \\ & = & \sqrt{(\alpha x_2)^2+(\alpha x_3)^2}. & \end{array}$$

よって、$\alpha(x_1,x_2,x_3)^T$ は M に含まれる。以上より、M は錐であるといえる。

2. $x_1 = 0, x_2 = \pi$ とし、$\alpha = \frac{1}{2}$ とする。このとき、$\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) = 0$ であるが、$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \frac{\pi}{2}$ となる。つまり、$\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \geq f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$ を満たさないので、凸関数でない。

問題 IV.

2 次元（ユークリッド）空間上の正方形のうちで，面積が 1 であり 4 つの頂点の座標 (x 座標と y 座標) が全て自然数となるものについて考える．そのような正方形を集めた集合を Q としよう．集合 Q の濃度が $\aleph_0$（アレフ・ゼロ）となることを示せ.

問題文中の正方形とは、ある整数 x, y に対し、頂点が $(x,y),(x+1,y),(x,y+1),(x+1,y+1)$ の４点からなる正方形のことである。ここで、頂点 $(x,y),(x+1,y),(x,y+1),(x+1,y+1)$ からなる正方形と、整数の二つ組 (x,y) とを対応させると、それらは全単射な写像となる。よって、集合 Q と $\mathcal{N}^2$ は対等である。すなわち、

$$Q \sim \mathcal{N}^2$$

が成り立つ。また、$\mathcal{N}^2$ と $\mathcal{N}$ は対等、つまり

$$\mathcal{N}^2 \sim \mathcal{N}$$

である。なぜなら、$\mathcal{N}^2$ から $\mathcal{N}$ への写像 f として、$f(x,y) = (x+y)(x+y-1)/2 + x$ と定義すれば、これが全単射となるからである。以上の結果を合わせると、集合 Q と $\mathcal{N}$ は対等、つまり

$$Q \sim \mathcal{N}$$

が成り立つ。これは、集合 Q の濃度が $\aleph_0$（アレフ・ゼロ）であることを意味する。