数理工学第一 期末試験解答 (2006年8月1日)

問題1 集合 A と B がともにたかだか可算な集合であるならば，和集合 $A \cup B$ もたかだか可算な集合であることを証明せよ．

略解1 集合 A と B がともにたかだか可算な集合であるならば，単射 $f : A \to N$ と $g : A \to N$ が存在する．このとき，写像 $h : A \cup B \to Z$ を

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if} \quad x \in A \\ -g(x) & \text{if} \quad x \notin A, x \in B \end{cases}$$

と定義する．このとき，$h(x_1) = h(x_2)$ とする．$h(x_1) \geq 0$ ならば $h(x_2) \geq 0$ であり，$f(x_1) = h(x_1) = h(x_2) = f(x_2)$ が成立し，f が単射なので，$x_1 = x_2$ となる．$h(x_1) < 0$ ならば $h(x_2) < 0$ であり，$g(x_1) = -h(x_1) = -h(x_2) = g(x_2)$ が成立し，g が単射なので，$x_1 = x_2$ となる．したがって，h は単射であり，Z が可算な集合なので，$A \cup B$ はたかだか可算な集合である．

問題2 2次元ユークリッド空間 R^2 の部分集合 $A = \{(x, y) | |x| + |y| < 1\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 集合 A を図示せよ．

(2) 点 $(1, 1)$ が A の外点であることを外点の定義に基づき証明せよ．

(3) 集合 A が開集合となることを開集合の定義に基づき証明せよ．

略解2 (1) 略

(2) 点 $(1, 1)$ を中心とし半径 0.1 の球体

$$B = \{(x, y) | (x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 0.1^2\}$$

を考える．この球体上の任意の点 $(x, y) \in B$ において

$$x > 1 - 0.1 = 0.9, \ y > 1 - 0.1 = 0.9$$

であるから，

$$|x| + |y| > 0.9 + 0.9 > 1$$

となるので，点 $(x, y) \notin A$ である．したがって，$B \subset A^C$ であり，点 $(1, 1)$ は A の外点である．

(3) $(x_1, y_1) \in A$ とする．このとき、

$$\epsilon = 0.5(1 - |x_1| - |y_1|) > 0$$

とし、中心 (x_1, y_1)，半径 ϵ の球体

$$B = \{(x, y) | (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 < \epsilon^2\}$$

を考える．このとき，$(x, y) \in B$ ならば

$$|x| < |x_1| + \epsilon, \ |y| < |y_1| + \epsilon,$$

となるので，

$$|x| + |y| < |x_1| + |y_1| + 2\epsilon = 1$$

が成立し，$(x, y) \in A$ である．したがって，(x_1, y_1) は A の内点となるので，集合 A は開集合である．

問題 3 閉区間 $[a, b]$ 上の実数値連続関数全体の集合を $C[a, b]$ とする．任意の $f, g \in C[a, b]$ に対して、

$$d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

と定義するとき、d が $C[a, b]$ 上の距離関数となることを証明せよ．

略解 3 **(i)** 任意の $f, g \in C[a, b]$ に対して、

$$d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \geq 0$$

が成立する．

(ii) 任意の $f, g \in C[a, b]$ に対して、$f = g$ ならば定義から明らかに $d(f, g) = 0$ である．

逆に，$d(f, g) = 0$ ならば

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = 0$$

となる．これは，任意の $x \in [a, b]$ に対して $f(x) - g(x) = 0$ となることを意味し、これより $f = g$ である．

(iii) 定義より明らかに、任意の $f, g \in C[a, b]$ に対して、

$$d(f, g) = d(g, f)$$

が成立する．

(iv) 任意の $f, g, h \in C[a, b]$ を考える．ある $x_1 \in [a, b]$ に対して，

$$d(f, h) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - h(x)| = |f(x_1) - h(x_1)|$$

となる．このとき，

$$\begin{aligned} d(f, h) &\leq |f(x_1) - g(x_1)| + |g(x_1) - h(x_1)| \\ &\leq d(f, g) + d(g, h) \end{aligned}$$

が成立する．

以上のことから，d は $C[a, b]$ 上の距離関数となる．

問題 4 次のユークリッド空間の部分集合について，それぞれ部分空間，アフィン集合，錐，凸集合，閉集合であるかどうか調べ，答え (○または×) を表にして，答案用紙に書け．

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \{(x_1, x_2) \in R^2 | |x_1| \geq x_2\} \\
S_2 &= \{(1, 1) \in R^2\} \\
S_3 &= \emptyset \quad (R^2 \text{ における空集合}) \\
S_4 &= \{(x_1, x_2) \in R^2 | x_1 x_2 = 0\} \\
S_5 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_1 + x_2 = 0, x_3 > 0\}
\end{aligned}
$$

ここで，R^2 と R^3 は，それぞれ 2 次元と 3 次元のユークリッド空間を表す．

略解 4 次の表のようになる．

表 1: 問題 4 の答

	部分空間	アフィン集合	錐	凸集合	閉集合
S_1	×	×	○	×	○
S_2	×	○	×	○	○
S_3	○	○	○	○	○
S_4	×	×	○	×	○
S_5	×	×	×	○	×

問題 5 集合 $G = \{5^n | n \in Z\}$ が実数の乗法について群をなすことを証明せよ．ここで，Z は整数全体の集合を表す．

略解 5 任意の $n_1, n_2 \in Z$ に対して，

$$5^{n_1} 5^{n_2} = 5^{n_1 + n_2} \in G$$

となるので，実数の乗法は G 上の 2 項算法である．

(i) 任意の $n_1, n_2, n_3 \in Z$ に対して，

$$(5^{n_1} 5^{n_2}) 5^{n_3} = 5^{n_1 + n_2 + n_3} = 5^{n_1} (5^{n_2} 5^{n_3})$$

となるので，結合律が成り立つ．

(ii) $5^0 = 1 \in G$ と任意の $n \in Z$ に対して，

$$5^n 5^0 = 5^n, \ 5^0 5^n = 5^n$$

が成立するので，単位元 $5^0 \in G$ が存在する．

(iii) 任意の $n \in Z$ に対して,

$$5^n 5^{-n} = 5^0,\ 5^{-n} 5^n = 5^0$$

が成立するので，5^n の逆元 $5^{-n} \in G$ が存在する.

(i)，(ii)，(iii) より，G は乗法について群をなす.