数理工学第一　中間試験解答例　　２００７年５月２９日

問題１

実数 x と y を含んだ２つの推論が下にある。それぞれの推論が正しいかどうか述べよ。推論が正しくないものについては、それを示す反例を１つ挙げよ。

- $x+y<2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2<2$
- $x^2+y^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=y=0$

- $x+y<2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2<2$
  正しくない。$x=0,\ y=-2$ のとき、$x+y<2$ であるが、$x^2+y^2\geq 2$ である。
- $x^2+y^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=y=0$
  正しい。$x^2\geq 0,\ y^2\geq 0$ と $x^2+y^2=0$ から、$x^2=y^2=0$ である。これより、$x=y=0$ が導かれる。

問題２

P と Q は A の部分集合であり、f を A から B への写像とする。このとき、以下の関係を証明せよ。

1. $P\cap Q=P \quad \Rightarrow \quad f(P\cup Q)=f(Q)$
2. $f(P)=f(f^{-1}(f(P)))$

1. $Q\subset P\cup Q$ より、$f(Q)\subset f(P\cup Q)$ である。次に、

$$
\begin{aligned}
y\in f(P\cup Q) &\Longrightarrow \exists x\in P\cup Q,\quad f(x)=y \\
&\Longrightarrow \exists x\in (P\cap Q)\cup Q,\quad f(x)=y \qquad (\because P\cap Q=P) \\
&\Longrightarrow \exists x\in (P\cup Q)\cap(Q\cup Q),\quad f(x)=y \qquad (\because \text{分配法則}) \\
&\Longrightarrow \exists x\in (P\cup Q)\cap Q,\quad f(x)=y \\
&\Longrightarrow \exists x\in Q,\quad f(x)=y \\
&\Longrightarrow y\in f(Q)
\end{aligned}
$$

より、$f(P \cup Q) \subset f(Q)$ がわかる。よって、$P \cap Q = P \quad \Rightarrow \quad f(P \cup Q) = f(Q)$ が示された。

2.

$$\begin{aligned}
y \in f(P) &\Longrightarrow \exists x,\ x \in P,\ f(x) = y \\
&\Longrightarrow \exists x,\ f(x) \in f(P),\ f(x) = y \\
&\Longrightarrow \exists x,\ x \in f^{-1}(f(P)),\ f(x) = y \\
&\Longrightarrow \exists x,\ f(x) \in f(f^{-1}(f(P))),\ f(x) = y \\
&\Longrightarrow y \in f(f^{-1}(f(P)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y \in f(f^{-1}(f(P))) &\Longrightarrow \exists x,\ x \in f^{-1}(f(P)),\quad f(x) = y \\
&\Longrightarrow \exists x,\ f(x) \in f(P),\quad f(x) = y \\
&\Longrightarrow y \in f(P)
\end{aligned}$$

よって、$f(P) = f(f^{-1}(f(P)))$ が示された。

問題３

実数空間上の部分集合族 $\{P_{ij}\}_{i,j \in \mathcal{N}}$ を $P_{ij} = \left\{ x \in \Re \;\middle|\; \dfrac{1}{j} - \dfrac{1}{i} \leq x \quad \wedge \quad x < j - i \right\}$ と定義する。このとき、以下の問いに答えよ。

1. 実数空間 $\Re$ 上に通常の順序関係 $\leq$ を導入する。このとき、集合 P_{12} の最大元と上限はどうなるか述べよ。答えのみでよい。
2. $\bigcup_{j=1}^{\infty} P_{1j}$ を求め、その理由をできるだけ論理的に説明せよ。
3. $\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} P_{ij}$ を求めよ。答えだけで良い。

1. $P_{12} = \{x \in \Re \mid -\dfrac{1}{2} \leq x < 1\}$ である。最大限：無し、 上限：1。
2. 以下では、$[x]$ は x を越えない最大の整数を意味する。
   - $x \leq -1$ について考える。
     任意の $j \in \mathcal{N}$ に対し、$x \leq -1 < \dfrac{1}{j} - \dfrac{1}{1}$ なので、$x \notin P_{1j}$ となる。よって、$x \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} P_{1j}$ である。
   - $-1 < x < 0$ について考える。
     $\bar{j} = [1/(x+1)] + 1 \in \mathcal{N}$ とすると、$\dfrac{1}{\bar{j}} - \dfrac{1}{1} < x < 0 \leq \bar{j} - 1$ なので、$x \in P_{1\bar{j}}$ となる。よって、

$x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} P_{1j}$ である。

- $0 \leq x$ について考える。
  $\bar{j} = [x+2] \in \mathcal{N}$ とすると、$\dfrac{1}{\bar{j}} - \dfrac{1}{1} \leq 0 \leq x < \bar{j} - 1$ なので、$x \in P_{1\bar{j}}$ となる。よって、
  $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} P_{1j}$ である。

これらをまとめると、$\bigcup_{j=1}^{\infty} P_{1j} = \{x \in \Re \mid -1 < x\}$ となる。

3. $\bigcup_{j=1}^{\infty} P_{ij} = \{x \in \Re \mid -\dfrac{1}{i} < x\}$ である。よって、$\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} P_{ij} = \{x \in \Re \mid 0 \leq x\}$.

問題 4

任意の $x, y \in \Re$ に対し、$x - y$ が有理数であるとき、xTy として 2 項関係 T を定義する。

1. 2 項関係 T が $\Re$ における同値関係となることを示せ。
2. 0 の同値類 $C(0)$ が可算集合（可付番集合) であることを説明せよ。
3. 商集合 $\Re/T$（同値類を元とする集合）が無限集合であることを説明せよ。$\aleph_0 < \aleph$ であることは証明なしに使ってよい。

1.

反射律： 任意の $x \in \Re$ に対し、$x - x = 0 \in \mathcal{Q}$ が成り立つので、xTx である。

対称律； xTy を仮定する。T の定義より $x - y \in \mathcal{Q}$ である。すると、$y - x = -(x - y) \in \mathcal{Q}$ となるので、yTx を満たす。

推移律； xTy と yTz を仮定する。T の定義より $x - y \in \mathcal{Q}$, $y - z \in \mathcal{Q}$ である。すると、$x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathcal{Q}$ となるので、xTz を満たす。

反射律、対称律、推移律が成り立つので同値関係である。

2. $C(0) = \{x \in \Re \mid xT0\} = \{x \in \Re \mid x - 0 \in \mathcal{Q}\}$ より、$C(0)$ は有理数全体の集合と一致する。以下では、有理数集合 $\mathcal{Q}$ の濃度について考える。$\mathcal{N} \to \mathcal{Q}$ への写像として、$f(n) = n$ を考えると、これは単射である。よって、
$$|\mathcal{N}| \leq |\mathcal{Q}|.$$
$\mathcal{N} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{Q}$ への写像として、$f(p, q) = p/q$ を考えると、これは全射である。よって、
$$|\mathcal{Q}| \leq |\mathcal{N} \times \mathcal{Z}|.$$
$\mathcal{N} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{N}$ への写像として、$f(p, q) = (p + |q| - 1)^2 + p + |q| + q$ を考えると、これは全単射である。よって、
$$|\mathcal{N} \times \mathcal{Z}| = |\mathcal{N}|.$$

以上より、

$$|\mathcal{N}| \leq |\mathcal{Q}| \leq |\mathcal{N} \times \mathcal{Z}| = |\mathcal{N}|$$

が成り立ち、有理数の集合 $\mathcal{Q}$ が可算であることが分かる。

3. ２通りの説明を述べる。
   - もし、商集合が有限集合だったとする。元の数を k 個とすると、同値類を $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_k$ と表記することができる。同値類であるので、

     $$\bigcup_{i=1}^{k} C_i = \Re, \qquad \boldsymbol{i} \neq j,\ C_i \cap C_j = \emptyset$$

     が成り立つ。同値関係 T の定義より、同値類 C_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$ は有理数集合と濃度が等しい。つまり可算集合である。また、可算集合の有限個の和集合は可算集合であるため、$\bigcup_{i=1}^{k} C_i$ は可算集合となる。すると、実数の集合が可算集合となり矛盾である。よって、商集合は有限集合でない、つまり無限集合である。

   - 次のような数の集合について考える。

     $$\sqrt{2},\ \ 2\sqrt{2},\ \ 3\sqrt{2},\ \ 4\sqrt{2},\ \ 5\sqrt{2},\ \ \cdots$$

     これらの数は互いに同値関係にはない。なぜなら、自然数 $i, j (i \neq j)$ において、$i\sqrt{2} - j\sqrt{2} = (i-j)\sqrt{2} \notin \mathcal{Q}$ だからである。つまり、これらの数は同じ同値類には属さない。ということは、これらから作られる同値類

     $$C(\sqrt{2}),\ C(2\sqrt{2}),\ C(3\sqrt{2}),\ C(4\sqrt{2}),\ C(5\sqrt{2}),\ \ \cdots$$

     は、全て異なる同値類である。それゆえ、同値類の濃度は少なくても $\aleph_0$ であることがわかる。つまり、商集合は無限集合である。