数理工学第一　期末試験解答例　　２００７年7月３１日

問題１

1. $M_1 = \{(x,y) \in \Re^2 \ \mid \ 0 < |x| \leq 1,\ 0 \leq |y| < 1\}$ とする。M_1 の内部・外部・境界を求めよ。(答えだけ述べれば良い)
2. $M_2 = \{(x,y) \in \Re^2 \mid x+y > 1\} \cup \left\{ \left(\dfrac{2}{n}, 0 \right) \in \Re^2 \mid n \in \mathcal{N} \right\}$ とする。M_2 の全ての集積点と孤立点を求めよ。(答えだけ述べれば良い)

1.
   - 内部：$M_1^i = \{(x,y) \in \Re^2 \ \mid \ 0 < |x| < 1,\ |y| < 1\}$
   - 外部：$M_1^e = \{(x,y) \in \Re^2 \ \mid \ |x| > 1 \ \vee \ |y| > 1\}$
   - 境界：$M_1^b = \{(x,y) \in \Re^2 \ \mid \ |x| = 0 \text{ or } 1,\ |y| \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \Re^2 \ \mid \ |x| \leq 1,\ |y| = 1\}$
2.
   - 集積点の集合：$\{(x,y) \in \Re^2 \mid x+y \geq 1\} \cup \{(0,0)\}$
   - 孤立点の集合：$\left\{ \left(\dfrac{2}{n}, 0 \right) \in \Re^2 \mid n \in \mathcal{N}, n \geq 3 \right\}$

問題２

(X, d_1) を距離空間とする。任意の $x, y \in X$ に対し、X^2 から $\Re$ への関数 d_2 を

$$d_2(x,y) = \frac{d_1(x,y)}{1 + d_1(x,y)}$$

と定義する。このとき、次の問いに答えよ。

1. 距離関数 d_1 が満たしている条件を全て挙げよ。
2. (X, d_2) が距離空間となることを示せ。

1. 距離関数なので以下の 4 つの条件を満たす。
   (a) $\forall x, y \in X, \quad d_1(x,y) \geq 0$
   (b) $\forall x, y \in X, \quad d_1(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$
   (c) $\forall x, y \in X, \quad d_1(x,y) = d_1(y,x)$
   (d) $\forall x, y, z \in X, \quad d_1(x,z) \leq d_1(x,y) + d_1(y,z)$

2. (a)

$$\forall x,y\in X,\quad d_2(x,y)=\frac{d_1(x,y)}{1+d_1(x,y)}\geq 0.\qquad (\because\ d_1(x,y)\geq 0)$$

(b)

- $x=y$ のとき、$d_1(x,y)=0$ である。よって、$d_2(x,y)=\dfrac{d_1(x,y)}{1+d_1(x,y)}=0$ となる。
- $d_2(x,y)=\dfrac{d_1(x,y)}{1+d_1(x,y)}=0$ のとき、$d_1(x,y)=0$ である。よって、$x=y$ が導かれる。

(c)

$$\begin{aligned}\forall x,y\in X,\quad d_2(x,y)&=\frac{d_1(x,y)}{1+d_1(x,y)}\\&=\frac{d_1(y,x)}{1+d_1(y,x)}&&(\because\ d_1(x,y)=d_1(y,x))\\&=d_2(y,x)\end{aligned}$$

(d) $\forall x,y,z\in X,$

$$\begin{aligned}&d_2(x,y)+d_2(y,z)-d_2(x,z)\\&=\frac{d_1(x,y)}{1+d_1(x,y)}+\frac{d_1(y,z)}{1+d_1(y,z)}-\frac{d_1(x,z)}{1+d_1(x,z)}\\&=\frac{2d_1(x,y)d_1(y,z)+d_1(x,y)d_1(y,z)d_1(x,z)+d_1(x,y)+d_1(y,z)-d_1(x,z)}{(1+d_1(x,y))(1+d_1(y,z))(1+d_1(x,z))}\\&\geq\frac{2d_1(x,y)d_1(y,z)+d_1(x,y)d_1(y,z)d_1(x,z)}{(1+d_1(x,y))(1+d_1(y,z))(1+d_1(x,z))}&&(\because\ d_1(x,z)\leq d_1(x,y)+d_1(y,z))\\&\geq 0&&(\because\ d_1(x,y),d_1(y,z),d_1(x,z)\geq 0)\end{aligned}$$

よって、$d_2(x,y)+d_2(y,z)\geq d_2(x,z)$。

(a),(b),(c),(d) より、d_2 は距離関数であることが確認でき、(X,d_2) は距離空間といえる。

問題３

$(S_1,\mathcal{D}_1)$ と $(S_2,\mathcal{D}_2)$ は共に位相空間である。また、$f:S_1\to S_2$ を連続写像とする。このとき、以下の問いに答えよ。

1. 次の 2 つの定義を述べよ。
   - S_1 上の点列 $(x_k)_{k\in\mathcal{N}}$ が $\overline{x}\in S_1$ に収束する
   - $f:S_1\to S_2$ が連続写像である
2. S_1 上の点列 $(x_k)_{k\in\mathcal{N}}$ が $\overline{x}\in S_1$ に収束するならば、S_2 上の点列 $\Big(f(x_k)\Big)_{k\in\mathcal{N}}$ は $f(\overline{x})\in S_2$ に収束することを示せ。

1.
   - S_1 上の点列 $(x_k)_{k\in\mathcal{N}}$ が $\overline{x}\in S_1$ に収束する
     $\forall O\in\mathcal{D}_1(x\in O),\ \exists n_0\in\mathcal{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow x_n\in O$
   - $f:S_1\to S_2$ が連続写像である
     $\forall x\in S_1,\ \forall O_2\in\mathcal{D}_2(f(x)\in O_2),\ \exists O_1\in\mathcal{D}_1(x\in O_1),\ f(O_1)\subset O_2$

2. $f(\overline{x})$ の任意の開近傍 O_2 （つまり、$O_2\in\mathcal{D}_2,\ f(\overline{x})\in O_2$）について考える。$f$ は連続写像であるため、$f(O_1)\subset O_2$ を満たすような $\overline{x}$ の開近傍 O_1 （つまり、$O_1\in\mathcal{D}_1,\ \overline{x}\in O_1$）が存在する。$O_1$ は $\overline{x}$ の開近傍であるため、点列 $(x_k)_{k\in\mathcal{N}}$ が $\overline{x}$ に収束するという前提を用いると、ある $n_0\in\mathcal{N}$ が存在し、$n\geq n_0$ のとき $x_n\in O_1$ となる。この x_n において、$f(x_n)\in f(O_1)\subset O_2$ という関係が成り立っている。
   以上の議論をまとめると、$f(\overline{x})$ の任意の開近傍 O_2 に対し、ある $n_0\in\mathcal{N}$ が存在し、$n\geq n_0$ のとき $f(x_n)\in O_2$ が成立することになる。これは、$\Big(f(x_k)\Big)_{k\in\mathcal{N}}$ が $f(\overline{x})$ に収束することを意味する。

問題4

$\Re^2$ 上の４点からなる集合 $M=\{(1,1),(1,5),(2,3),(4,2)\}$ について、以下の問いに答えよ。

1. $(2,2)\in\Re^2$ を M の４つの点の凸結合で表せ。答えの中の一つを挙げればよい。
2. 集合 M の凸包を、３つの半空間の共通部分として表現したい。そのような３つの半空間を述べよ。

1. 凸結合なので、

$$\begin{aligned}&(2,2)=\alpha_1(1,1)+\alpha_2(1,5)+\alpha_2(2,3)+\alpha_4(4,2),\\&\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=1,\\&\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\geq 0\end{aligned}$$

   を満たすような係数 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ を見つければ良い。非負条件を無視すれば、これは４つの変数と３つの等式からなる線形方程式と見なせる。よって、（通常は）変数を１つ固定すれば、残りの３つの変数が一意に定まる。例えば、$\alpha_3=0$ とすれば、$\alpha_1=\frac{1}{2},\ \alpha_2=\frac{1}{6},\ \alpha_4=\frac{1}{3}$ である。これらは、結果的に非負条件も満たすので答えの１つになる。
   解答例
   - $(2,2)=\dfrac{1}{2}(1,1)+\dfrac{1}{6}(1,5)+0(2,3)+\dfrac{1}{3}(4,2)$
   - $(2,2)=\dfrac{2}{5}(1,1)+0(1,5)+\dfrac{2}{5}(2,3)+\dfrac{1}{5}(4,2)$

2. 部分集合 M の凸包は、$(1,1),(1,5),(4,2)$ の３点を結ぶ三角形（内部を含む）である。$x-y$ 座標とすると、$(1,1)$ と $(1,5)$ を通る直線は $x=1$、$(1,5)$ と $(4,2)$ を通る直線は $x+y=6$、$(4,2)$ と $(1,1)$ を通る直線は $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}=y$ である。ゆえに、題意を満たす３つの半空間とは、

- $\{(x,y)\in\Re^2 \mid x+y\leq 6\}$
- $\{(x,y)\in\Re^2 \mid x\geq 1\}$
- $\{(x,y)\in\Re^2 \mid \dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}\leq y\}$

となる。