数理工学第一　中間試験解答例　　　２００８年６月１０日

問題１

1. 真偽表を使って、$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ となることを示せ。
2. 前提 $\neg R,\ \neg Q \vee R,\ \neg P \vee Q$ が与えられたとき、結論として正しいものはどれか？

   $A)\ Q$　　$B)\ \neg P$　　$C)\ P \vee Q$　　$D)\ \neg P \to R$

1. 以下の真偽表から、$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ が成立することが分かる。

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$	$p \vee q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
T	T	F	F	F	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F	F	F	T	F

2. 正解は $B)\ \neg P$

【解説】

以下の真偽表から、$\neg Q \vee R$ と $\neg R \to \neg Q$ が同値、$\neg P \vee Q$ と $\neg Q \to \neg P$ が同値であることが分かるので、与えられた前提を $\neg R,\ \neg R \to \neg Q,\ \neg Q \to \neg P$ と書き換えることができる。
$\neg R \to \neg Q$ と $\neg Q \to \neg P$ が真であるとき、$\neg R \to \neg P$ が真である（三段論法）。
よって、前提 $\neg R,\ \neg Q \vee R,\ \neg P \vee Q$ から $\neg P$ が導かれる。

Q	R	$\neg Q$	$\neg R$	$\neg R \to \neg Q$	$\neg Q \vee R$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

問題２

1. $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (B_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ は集合族である、$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq (B_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ とする。このとき、$\cap(B_\sigma)_{\sigma\in\Sigma} \subseteq \cap(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ となることを示せ。
2. $f : A \to B$ を写像とする。P, Q は A の部分集合。このとき、以下の関係式を証明せよ。
$$P \cap Q \subset f^{-1}(f(P) \cap f(Q))$$
3. 任意の $x, y \in \Re$ に対し、
$$x * y > 0 \text{ であるとき } xTy$$
として $\Re$ 上の２項関係 T を定義する。($*$ は通常の乗算)
このとき、２項関係 T が反射律、対称律、推移律をみたすかどうかを判断し、その理由を簡単に説明せよ。

1. x を $\cap(B_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ の任意元とすると、$\cap$ の定義により、$\forall\sigma \in \Sigma, x \in B_\sigma$
また、$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq (B_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ より、$\forall\lambda \in \Lambda, \exists\sigma \in \Sigma, A_\lambda = B_\sigma$
よって、$\forall\lambda \in \Lambda, \exists\sigma \in \Sigma, B_\sigma = A_\lambda \wedge x \in B_\sigma$ が成立し、
$\forall\lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda$ が成立する。
よって、$x \in \cap(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ となる。
$x \in \cap(B_\sigma)_{\sigma\in\Sigma} \Longrightarrow x \in \cap(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ となるので、
$\cap(B_\sigma)_{\sigma\in\Sigma} \subseteq \cap(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が示された。

2.
$$\begin{aligned}
x \in P \cap Q &\Longrightarrow x \in P \wedge x \in Q \\
&\Longrightarrow f(x) \in f(P) \wedge f(x) \in f(Q) \\
&\Longrightarrow f(x) \in f(P) \cap f(Q) \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(f(P) \cap f(Q))
\end{aligned}$$

よって、$P \cap Q \subset f^{-1}(f(P) \cap f(Q))$ が示された。

3. T は対称律と推移律をみたすが、反射律をみたさない。
$0 * 0 = 0$ なので $x = 0$ のとき、xTx は成立しない。よって、T は反射律をみたさない。
x, y, z を任意実数とする。
$x * y > 0$ ならば $y * x = x * y > 0$ なので、T は対称律をみたす。
$x * y > 0$ ならば x, y がともに正の実数または x, y がともに負の実数である。よって、$xTy \wedge yTz$ ならば　x, y, z がすべて正の実数または x, y, z がすべて負の実数で、xTz となる。よって、T は対称律をみたす。

問題３

実数から実数への写像全体の集合を $\mathcal{F}$ とする。$\mathcal{F}$ の任意の２つの元 f_1 と f_2 に対し、

$$^\forall x \in \Re,\ \ f_1(x) \leq f_2(x) \text{ のとき } f_1 \preceq f_2$$

として順序関係 $\preceq$ を定義する。

$f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}$,　$f_1(x) = x + 1$,　$f_2(x) = 2x$,　$f_3(x) = x^2$ のとき、$(\mathcal{F}, \preceq)$ において、集合 $\{f_3,\quad f_1 \circ f_3,\quad f_3 \circ f_2,\quad f_1 \circ f_2 \circ f_3\ \}$ の極小元・極大元・最小元・最大元が存在するかどうかを述べ、存在するならばそれを求めよ。

　すべての $x \in \Re$ に対し、

$f_3(x) = x^2$

$f_1 \circ f_3(x) = x^2 + 1$

$f_3 \circ f_2(x) = (2x)^2 = 4x^2$

$f_1 \circ f_2 \circ f_3(x) = 2x^2 + 1$

　$f_3 \preceq f_1 \circ f_3 \preceq f_1 \circ f_2 \circ f_3$,　　$f_3 \preceq f_3 \circ f_2$　　である。

　よって、集合 $\{f_3,\quad f_1 \circ f_3,\quad f_3 \circ f_2,\quad f_1 \circ f_2 \circ f_3\ \}$ の

極小元は f_3

極大元は $f_1 \circ f_2 \circ f_3$ と $f_3 \circ f_2$

最小元は f_3

最大元は存在しない。

問題4

$\Re$ から $\Re$ への写像 f を $f(x) = |1-x|-1$ として定める。$\Re$ の任意の元 x と y に対し、$f \circ f(x) - f \circ f(y) = 0$ が成り立つとき xTy として 2 項関係 T を定義する。このとき次の問いに答えよ。

1. 合成写像 $f \circ f$ が単射であるかどうか、ならびに全射であるかどうかを理由を付けて答えよ。
2. 2 項関係 T が $\Re$ における同値関係となることを示せ。
3. 元 1 の同値類を求めよ。

1. $f \circ f(0) = f \circ f(2) = 0$ より $f \circ f$ は単射ではない。
   $f \circ f(\Re) = \{x \in \Re \mid x \geq -1\}$ より、$f \circ f(x) = -2$ を満たす x は存在せず、よって $f \circ f$ は全射ではない。

2. **反射律：** 任意の $x \in \Re$ に対し、$f \circ f(x) - f \circ f(x) = 0$ が成り立つので、xTx である。
   対称律； xTy とすると、T の定義より $f \circ f(x) - f \circ f(y) = 0$ という関係が成り立つ。すると、$f \circ f(y) - f \circ f(x) = 0$ となるので、yTx をみたす。
   推移律； xTy と yTz とすると、T の定義より $f \circ f(x) - f \circ f(y) = 0,\ f \circ f(y) - f \circ f(z) = 0$ という関係が成り立つ。すると、$0 = (f \circ f(x) - f \circ f(y)) + (f \circ f(y) - f \circ f(z)) = f \circ f(x) - f \circ f(z)$ となるので、xTz をみたす。
   反射律、対称律、推移律が成り立つので、T は同値関係である。

3. $f \circ f(1) - f \circ f(x) = 0$ をみたす x が同値類である。つまり、方程式 $f \circ f(x) = 1$ の解を求めれば良い。よって、元 1 の同値類 $C(1)$ は $C(1) = \{-3, 1, 5\}$ である。