数理工学第一　中間試験問題　　２００８年６月１０日

注意：　・すべての答案用紙に学籍番号、氏名、問題番号を忘れずに記入すること。
　　　　・答えは結果のみではなく、導出過程も要領よく記述すること。

問題１

1. 真偽表を使って、$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ となることを示せ。
2. 前提 $\neg R,\ \ \neg Q \vee R,\ \ \neg P \vee Q$ が与えられたとき、結論として正しいものはどれか？

   $A)\ \ Q$　　$B)\ \ \neg P$　　$C)\ \ P \vee Q$　　$D)\ \ \neg P \to R$

問題２

1. $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (B_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ は集合族である。$(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq (B_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ とする。
   このとき、$\cap(B_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \subseteq \cap(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ となることを示せ。
2. $f : A \to B$ を写像とする。P, Q は A の部分集合。このとき、以下の関係式を証明せよ。
   $$P \cap Q \subset f^{-1}(f(P) \cap f(Q))$$
3. 任意の $x, y \in \Re$ に対し、
   $$x * y > 0 \text{ であるとき } xTy$$
   として $\Re$ 上の２項関係 T を定義する。($*$ は通常の乗算)

   このとき、２項関係 T が反射律、対称律、推移律をみたすかどうかを判断し、その理由を簡単に説明せよ。

問題３

実数から実数への写像全体の集合を $\mathcal{F}$ とする。$\mathcal{F}$ の任意の２つの元 f_1 と f_2 に対し、

$$^\forall x \in \Re,\ \ f_1(x) \le f_2(x) \text{ のとき } f_1 \preceq f_2$$

として順序関係 $\preceq$ を定義する。

$f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F},\quad f_1(x) = x + 1,\quad f_2(x) = 2x,\quad f_3(x) = x^2$ のとき、$(\mathcal{F}, \preceq)$ において、集合 $\{f_3,\quad f_1 \circ f_3,\quad f_3 \circ f_2,\quad f_1 \circ f_2 \circ f_3\ \}$ の極小元・極大元・最小元・最大元が存在するかどうかを述べ、存在するならばそれを求めよ。

問題４

$\Re$ から $\Re$ への写像 f を $f(x) = |1 - x| - 1$ として定める。$\Re$ の任意の元 x と y に対し、$f \circ f(x) - f \circ f(y) = 0$ が成り立つとき xTy として 2 項関係 T を定義する。このとき次の問いに答えよ。

1. 合成写像 $f \circ f$ が単射であるかどうか、ならびに全射であるかどうかを理由を付けて答えよ。
2. 2 項関係 T が $\Re$ における同値関係となることを示せ。
3. 元 1 の同値類を求めよ。