数理工学第一　期末試験解答例　　２００８年８月５日

問題１

ユークリッド空間 $\Re^2$ 上の部分集合として、$P_n = \{(x,y) \in \Re^2 \mid 1 - \frac{1}{n} < x^2 + y^2 \leq 4 + \frac{1}{n}\}$ と定める。次の 5 つの集合の中で、開集合であるもの閉集合であるものをそれぞれ全て選べ（答えだけ述べれば良い)。ただし、P^i は P の内部、$\overline{P}$ は P の閉包を意味する。

$$P_1, \quad P_2^i, \quad \overline{P_3}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n^i, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{P_n}$$

$$P_1 = \{(x,y) \in \Re^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 5\} \qquad P_2^i = \{(x,y) \in \Re^2 \mid \frac{1}{2} < x^2 + y^2 < 4\frac{1}{2}\}$$

$$\overline{P_3} = \{(x,y) \in \Re^2 \mid \frac{2}{3} \leq x^2 + y^2 \leq 4\frac{1}{3}\} \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n^i = \{(x,y) \in \Re^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{P_n} = \{(x,y) \in \Re^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

である。よって、

開集合： P_2^i

閉集合： $\overline{P_3}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n^i, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{P_n}$

問題２

$\Re^2$ の元 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ に対し、以下のように距離関数 d_1, d_2 を定める。

$$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

このとき、次の問いに答えよ。

1. d_1 か d_2 の どちらかを選び、それが実際に距離関数であることを示せ。
2. 点列 $(\boldsymbol{x}_n)_{n \in \mathcal{N}}$ と $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Re^2$ がある。「距離空間 $(\Re^2, d_1)$ において、点列 $(\boldsymbol{x}_n)_{n \in \mathcal{N}}$ が $\bar{\boldsymbol{x}}$ に収束する」ことと、「距離空間 $(\Re^2, d_2)$ において、点列 $(\boldsymbol{x}_n)_{n \in \mathcal{N}}$ が $\bar{\boldsymbol{x}}$ に収束する」ことが必要十分であることを示せ。

1. 距離関数であるためには、以下の 4 つの条件を満たす必要がある。
   (a) $\forall x, y \in X,\ \ d_1(x, y) \geq 0$
   (b) $\forall x, y \in X,\ \ d_1(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y$
   (c) $\forall x, y \in X,\ \ d_1(x, y) = d_1(y, x)$
   (d) $\forall x, y, z \in X,\ \ d_1(x, z) \leq d_1(x, y) + d_1(y, z)$

   ここでは、d_1 が距離関数であることを示す。
   (a)
   $$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Re^2, \quad d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \geq 0.$$
   (b)
   - $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ のとき、$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0$ である。
   - $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0$ とする。$|x_1 - y_1| = 0,\ |x_2 - y_2| = 0$ より、$x_1 = y_1,\ x_2 = y_2$ である。よって、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ といえる。

   (c)
   $$\begin{aligned}\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Re^2, \quad d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ &= |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| \\ &= d_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\end{aligned}$$
   (d)
   $$\begin{aligned}\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \Re^2, \quad d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) &= |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| \\ &= |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + |x_2 - y_2 + y_2 - z_2| \\ &\leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| \\ &= d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\end{aligned}$$
   以上より、d_1 は距離関数であることが示された。

2. 「距離空間 $(\Re^2, d_1)$ において、点列 $(\boldsymbol{x}_n)_{n \in \mathcal{N}}$ が $\bar{\boldsymbol{x}}$ に収束する」とは
   $$\forall \epsilon_1 > 0,\ \ \exists n_1,\ \ \forall n \geq n_1,\ \ d_1(\boldsymbol{x}_n, \bar{\boldsymbol{x}}) < \epsilon_1, \tag{1}$$
   「距離空間 $(\Re^2, d_2)$ において、点列 $(\boldsymbol{x}_n)_{n \in \mathcal{N}}$ が $\bar{\boldsymbol{x}}$ に収束する」とは
   $$\forall \epsilon_2 > 0,\ \ \exists n_2,\ \ \forall n \geq n_2,\ \ d_2(\boldsymbol{x}_n, \bar{\boldsymbol{x}}) < \epsilon_2 \tag{2}$$
   を意味する。

   - (1) $\Longrightarrow$ (2) を示す
     任意の $\epsilon_2 > 0$ に対し、(1) 中の ϵ_1 に ϵ_2 を代入すると、ある n_1 が存在し、任意の $n \geq n_1$ に対し、$d_1(\boldsymbol{x}_n, \bar{\boldsymbol{x}}) < \epsilon_2$ である。よって、n_2 として n_1 を持ってくると、任意の $n \geq n_2$ に対し、$d_2(\boldsymbol{x}_n, \bar{\boldsymbol{x}}) \leq d_1(\boldsymbol{x}_n, \bar{\boldsymbol{x}}) < \epsilon_2$ が成り立つ。つまり、(2) が導かれる。

- (2) $\Longrightarrow$ (1) を示す
  任意の $\epsilon_1 > 0$ に対し、(2) 中の ϵ_2 に $0.5\epsilon_1$ を代入すると、ある n_2 が存在し、任意の $n \geq n_2$ に対し、$d_2(\boldsymbol{x}_n, \bar{\boldsymbol{x}}) < 0.5\epsilon_1$ である。このとき、n_1 として n_2 を持ってくると、任意の $n \geq n_1$ に対し、$d_1(\boldsymbol{x}_n, \bar{\boldsymbol{x}}) \leq 2d_2(\boldsymbol{x}_n, \bar{\boldsymbol{x}}) < \epsilon_1$ が成り立つ。つまり、(1) が導かれる。

以上より、必要十分であることが示された。

問題 3

1. 空でない集合 S とその部分集合系 $\mathcal{D}$ がある。$\mathcal{D}$ が S の位相となるための条件を全て挙げよ。
2. a より大きく b より小さい数の集合を $O_{ab} = \{x \in \Re \mid a < x < b\}$ と表す。ただし、$a \geq b$ のときは $O_{ab} = \emptyset$ とする。$\Re$ の部分集合系 $\{O_{ab}\}_{a,b\in\Re} \cup \{\emptyset, \Re\}$ が、$\Re$ の位相であるかどうか述べよ。また、その理由を説明せよ。

1.
   - $S \in \mathcal{D},\ \emptyset \in \mathcal{D}$
   - $\mathcal{D}$ の有限個の任意の元 $O_1, O_2, \cdots, O_n$ に対して、$\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{D}$
   - $\mathcal{D}$ の元からなる任意の集合族 $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対して、$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{D}$
2. $O_{12} = \{x \in \Re \mid 1 < x < 2\}$ と $O_{34} = \{x \in \Re \mid 3 < x < 4\}$ に対し、その和集合

$$O_{12} \cup O_{34} = \{x \in \Re \mid (1 < x < 2) \vee (3 < x < 4)\}$$

   は、$\{O_{ab}\}_{a,b\in\Re} \cup \{\emptyset, \Re\}$ に含まれない。よって位相ではない。

問題 4

$\Re^3$ 上の部分集合 $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Re^3 \mid x_1x_2 \geq x_3^2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$ が、凸錐であることを示せ。ヒント：相加相乗平均の定理（$\alpha, \beta \geq 0$ に対し $\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$ ）を使うとよい。

- 凸集合の証明

任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ に対し、その凸結合がまた集合 M に含まれていることを示す。

今、$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in M$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) \in M$、$\alpha \in [0, 1]$ とする。すると、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の凸結合は、

$$\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} = (\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1,\ \alpha x_2 + (1-\alpha)y_2,\ \alpha x_3 + (1-\alpha)y_3)$$

と表すことができる。$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は M に含まれるので次の不等式が成り立つ。

$$\begin{array}{lll} x_1x_2 \geq x_3^2, & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, \\ y_1y_2 \geq y_3^2, & y_1 \geq 0, & y_2 \geq 0. \end{array}$$

また、$\alpha \in [0, 1]$ より、次の不等式が成り立つ。

$$\alpha \geq 0, \quad (1-\alpha) \geq 0.$$

これらの条件を用いると、

$$\begin{array}{ll} z_1 = \alpha x_1 + (1-\alpha)y_1 \geq 0 & (\because\ \alpha,\ x_1,\ (1-\alpha),\ y_1 \geq 0) \\ z_2 = \alpha x_2 + (1-\alpha)y_2 \geq 0 & (\because\ \alpha,\ x_2,\ (1-\alpha),\ y_2 \geq 0) \end{array}$$

が成り立つ。また、

$$\begin{array}{rcll} z_1z_2 - z_3^2 & = & (\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1)(\alpha x_2 + (1-\alpha)y_2)) - (\alpha x_3 + (1-\alpha)y_3))^2 & \\ & = & \alpha^2(x_1x_2 - x_3^2) + (1-\alpha)(y_1y_2 - y_3^2) + \alpha(1-\alpha)(x_1y_2 + y_1x_2 - 2x_3y_3) & \\ & \geq & \alpha(1-\alpha)(x_1y_2 + y_1x_2 - 2x_3y_3) & (\because\ x_1x_2 \geq x_3^2,\ y_1y_2 \geq y_3^2) \\ & \geq & \alpha(1-\alpha)(2\sqrt{x_1y_2y_1x_2} - 2x_3y_3) & (\because\ \text{相加相乗平均}) \\ & \geq & \alpha(1-\alpha)(2\sqrt{x_3^2y_3^2} - 2x_3y_3) & (\because\ x_1x_2 \geq x_3^2,\ y_1y_2 \geq y_3^2) \\ & \geq & \alpha(1-\alpha)(2x_3y_3 - 2x_3y_3) & \\ & = & 0 & \end{array}$$

が成り立つ。つまり、$\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \in M$ といえる。

任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ に対し、その凸結合がまた集合 M に含まれているので、集合 M は凸集合である。

- 錐の証明

任意の $\boldsymbol{x} \in M$ に対し、その非負のスカラー倍がまた集合 M に含まれていることを示す。

今、$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in M$ $\alpha \geq 0$ とする。$\boldsymbol{x}$ は M に含まれるので次の不等式が成り立つ。

$$x_1x_2 \geq x_3^2, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

このとき、

$$\begin{array}{ll} \alpha x_1 \geq 0 & (\because x_1, \alpha \geq 0), \\ \alpha x_2 \geq 0 & (\because x_2, \alpha \geq 0), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} \alpha x_1 \alpha x_2 & = & \alpha^2 x_1 x_2 & \\ & \geq & \alpha^2 x_3^2 & (\because x_1x_2 \geq x_3^2) \\ & \geq & (\alpha x_3)^2 & \end{array}$$

である。つまり、$\alpha\boldsymbol{x} \in M$ といえる。

任意の $\boldsymbol{x} \in M$ に対し、その非負のスカラー倍がまた集合 M に含まれているので、集合 M は錐である。