数理工学第一　期末試験解答例　　　２００９年８月

問題１　$A = \{x \in \Re |\ x = n\pi,\ n \in \mathcal{Z}\}$ となる．そこで $f : A \to \mathcal{N}$ を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi} & (x > 0) \\ \frac{-2x}{\pi} + 1 & (x \leq 0) \end{cases}$$

と定めると，f によって，

$$0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \cdots \to 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \cdots$$

のような対応関係が出来る．よって，f は A から $\mathcal{N}$ への全単射であり，A と $\mathcal{N}$ は対等である．ゆえに A は加算集合である．

(配点) 20 点.

問題２

1. 任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $k_0 \in \mathcal{N}$ が存在して，

$$k \geq k_0 \Rightarrow x_k \in B(\boldsymbol{x}, \epsilon)$$

となる．

2. (方針) $\boldsymbol{x}$ に収束する M 内の点列を実際に構成する．

(イ) 任意の $\boldsymbol{x} \in M^i$ をとる．このとき $x \in M$ である．いま，点列 $(\boldsymbol{x}_k)_{k \in \mathcal{N}}$ を $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}, \forall k \in \mathcal{N}$ と定める．これは M 内の点列で，$\boldsymbol{x}$ に収束するので，$x \in L$ である．

(ロ) 任意の $\boldsymbol{x} \in M^b$ をとる．ヒントに記したように，任意の $\epsilon > 0$ に対して $B(\boldsymbol{x}, \epsilon) \cap M \neq \emptyset$ となる．そこで，点列 $(x_k)_{k \in \mathcal{N}}$ を任意の $k \in \mathcal{N}$ に対して $x_k \in B(\boldsymbol{x}, \frac{1}{k}) \cap M$ となるようにとる．定め方より，$(x_k)_{k \in \mathcal{N}}$ は M 内の点列である．次に $(x_k)_{k \in \mathcal{N}}$ が $\boldsymbol{x}$ に収束することを示す．任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある自然数 k_0 が存在して，$1/k_0 < \epsilon$ を満たす．$k \geq k_0$ とすると，$1/k \leq 1/k_0 < \epsilon$ であり，$x_k \in B(\boldsymbol{x}, 1/k) \subset B(\boldsymbol{x}, 1/k_0) \subset B(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ となる．したがって，$(x_k)_{k \in \mathcal{N}}$ は $\boldsymbol{x}$ に収束する．以上により，$\boldsymbol{x} \in L$ となる．

3. 任意の $\boldsymbol{x} \in L$ をとる．このとき，$\boldsymbol{x} \notin M^e$ であることを示す．$x \in M^e$ であることと

$$\exists \epsilon > 0, B(\boldsymbol{x}, \epsilon) \subset M^c$$

が成り立つことは等価だから，$\boldsymbol{x} \in L$ のときにその否定

$$\forall \epsilon > 0, B(\boldsymbol{x}, \epsilon) \not\subset M^c \ (*)$$

が成立することを示せばよい．(*) はさらに，

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists y \in \Re^n,\ y \in B(\boldsymbol{x}, \epsilon) \wedge y \notin M^c \ (**)$$

と等価である．

$\boldsymbol{x} \in L$ より，M 内の $\boldsymbol{x}$ に収束する点列 $(x_k)_{k \in \mathcal{N}}$ が存在する．いま，$\epsilon > 0$ を任意に取る．すると，ある $k_0 \in \mathcal{N}$ が存在して，$x_{k_0} \in B(\boldsymbol{x}, \epsilon) \cap M$ となる．ゆえに (**) が成り立つ．以上により，$\boldsymbol{x} \notin M^e$ である．

(配点) 1: 10 点，2(イ)(ロ): 各 3 点，3: 4 点.

問題３

1. 抽象空間で極限や連続の概念を定義する数学的構造

2. 任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$f(B(\boldsymbol{x}, \delta)) \subset B(f(\boldsymbol{x}), \epsilon)$ が成り立つ．

(配点) 1: 10 点，2：10 点.

問題４

1. 位相: $\mathcal{D}_3$

(理由) $\alpha \in \Re$ を任意の値として，問題文の数列を考える．ここで，$\bar{\alpha} \in \Re$ を任意の値とする．$\mathcal{D}_3$ の元では，$\bar{\alpha}$ を含む開集合は $\Re$ だけである．すると，$k \geq 1$ に対して $\alpha_k \in \Re$ となり，$(\alpha_k)_{k \in \mathcal{N}}$ は $\bar{\alpha}$ に収束する．

2. 位相: $\mathcal{D}_2$，$\alpha = 0$ のとき収束値 0，$\alpha = 1$ のとき収束値 1

(理由) 問題の数列が $\bar{\alpha}$ に収束したとする．$\mathcal{D}_2$ の元では，$\bar{\alpha}$ を含む開集合として，$\{\bar{\alpha}\}$ がある．よって，収束の定義より，ある $k_0 \in \mathcal{N}$ が存在して，$k \geq k_0$ のとき $\alpha_k \in \bar{\alpha}$，すなわち $k \geq k_0$ のとき $\alpha_k = \bar{\alpha}$ となる．このとき，$\alpha^{k_0} = \bar{\alpha} = \alpha^{k_0+1}$ となり，$\alpha^{k_0}(\alpha - 1) = 0$ となる．この方程式を満たす α は $\alpha = 0$ と $\alpha = 1$ である．逆にこれらの値のとき数列が

収束し，収束値がそれぞれ 0 と 1 であることは容易にわかる．

3. 位相: $\mathcal{D}_1$，収束値 $-1 < \alpha < 1$ のとき 0，$\alpha = 1$ のとき 1
(理由) 問題 1，2 より，問題文の条件を満たすものの候補は $\mathcal{D}_1$ だけである．そこで $\mathcal{D}_1$ のときの数列の収束を調べると，数列は $-1 < \alpha < 1$ のとき 0 に収束し，$\alpha = 1$ のとき 1 に収束するので，問題文の条件を確かに満たす．

(配点) 各問に対して，位相: 4 点．収束する α の値と収束値は，位相が正しい場合のみ採点し各 4 点．

問題 5

1. 凸包は図 1 のようになる．

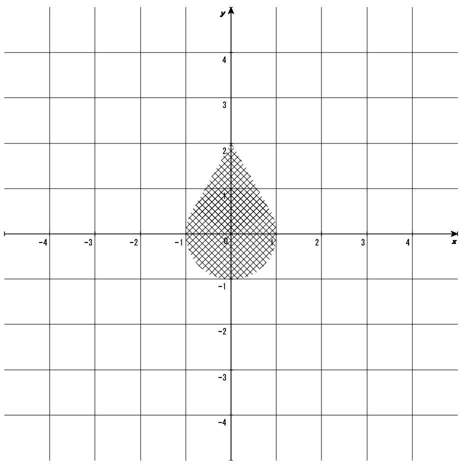

図 1　凸包の図示

2. 3 辺の長さが $2, 1, \sqrt{3}$ の直角三角形が 2 つと半径 1，中心角 240 度の扇形が 1 つ出来るから，求める面積は

$$1 * \sqrt{3} * \frac{1}{2} * 2 + 1 * 1 * \pi * \frac{240}{360} = \sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$$

となる．

(配点) 凸包の図示: 10 点，面積: 10 点．