2010 年度数理工学第一中間試験解答例

1　命題p，q，rからなる複合命題　$(p \wedge q) \to r$　と $p \to (q \to r)$ が同値であることを真偽表を用いて示せ。

下記真偽表より，$(p \wedge q) \to r$　と $p \to (q \to r)$ が同値であることが分かる。

p	q	r	(p	∧	q)	→	r	p	→	(q	→	r)
T	T	T		T		T			T		T	
T	T	F		T		F			F		F	
T	F	T		F		T			T		T	
T	F	F		F		T			T		T	
F	T	T		F		T			T		T	
F	T	F		F		T			T		F	
F	F	T		F		T			T		T	
F	F	F		F		T			T		T	
				①		②			④		③	

2　下記 $\boxed{あ}$ ～ $\boxed{え}$ をうめよ。

2.1　$\mathbb{Z}^+$を正の整数全体の集合とする。任意の$k \in \mathbb{Z}^+$に対して，$A_k = \left(\frac{1}{k}, 8 + \frac{3}{k}\right)$ とする。このとき

集合 $\cup_{k \in \mathbb{Z}^+} A_k = (0\,,11)$；　集合 $\cap_{k \in \mathbb{Z}^+} A_k = (1,8]$

2.2　$\Re^+$を正の実数全体の集合とする。任意の$x \in \Re^+$に対して，

$B_x = \left(-\frac{x}{3}, \frac{x}{2}\right)$ とする。このとき

集合 $\cup_{x \in \Re^+} B_x = (-\infty\,,+\infty)$;　集合 $\cap_{x \in \Re^+} B_x = \{0\}$

3　$f: A \to B$を任意の写像とする。$P \subset A,\ Q \subset B$のとき

$f^{-1}(B - Q) = A - f^{-1}(Q)$ であることを示せ。

証明:

xを任意とする

(1)

$x \in f^{-1}(B - Q)$

$\Rightarrow\ x \in A\ \wedge f(x) \in B - Q$

$\Rightarrow x \in A\ \wedge\ f(x) \in B\ \wedge \neg(f(x) \in Q)$

$\Rightarrow x \in A\ \wedge \neg\left(x \in f^{-1}(Q)\right)$

$\Rightarrow x \in A -\ f^{-1}(Q)$

(2)

$x \in A -\ f^{-1}(Q)$

$\Rightarrow\ x \in A\ \wedge \neg\left(x \in f^{-1}(Q)\right)$

$\Rightarrow f(x) \in B\ \wedge \neg(f(x) \in Q)$

$\Rightarrow f(x) \in B - Q$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(B - Q)$

(1),(2)より　　　$f^{-1}(B - Q) = A - f^{-1}(Q)$　は成り立つ。

Q.E.D.

4　A, Bを任意の集合とする。このとき，$\wp(A) \cup \wp(B) \subset \wp(A \cup B)$ は成り立つか。成り立つならばそれを証明し，そうでないなら反例を示せ。ただし$\wp(A)$はAのべき集合を表すものとする。

証明：Sを任意の集合とする

$S \in \wp(A) \cup \wp(B)\ \ \Rightarrow S \in \wp(A)\ \vee\ S \in \wp(B)$

$\Rightarrow S \subset A\ \ \vee S \subset B$

$\Rightarrow S \subset A \cup B\ \ (\because \mathrm{A} \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}\ \wedge\ \mathrm{B} \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B})$

$\Rightarrow S \in \wp(A \cup B)$

よって，$\wp(A) \cup \wp(B) \subset \wp(A \cup B)$ は成り立つ。

Q.E.D.

5　写像 $f: \Re \to \Re$ を$f(x) = |1 - x| - 1$ として定める。$\wp(\Re)$上の関係 ~ を

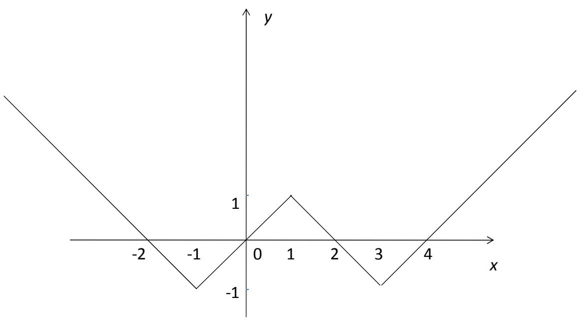
$$P_1 \sim P_2 \Leftrightarrow\ f \circ f(P_1) = f \circ f(P_2)$$

として定義するとき次の問いに答えよ。

5.1　$f \circ f$ が単射であるか，また全射であるかを理由とともに述べよ。

5.2　~ が$\wp(\Re)$上の同値関係であることを示せ。

5.3　$P = \{x \mid 0 \le x < 1\}$ とする。同値類$C(P)$は有限集合であるかを理由とともに述べよ。また，$C(P)$の元となる閉開区間及び開閉区間を一つずつあげよ。



$$
\begin{aligned}
&f \circ f(x) \\
&= f\big(f(x)\big) \\
&= |1 - f(x)| - 1 \\
&= |1 - (|1 - x| - 1)| - 1 \\
&= \big|2 - |1 - x|\big| - 1 \\
&= \begin{cases} |2 - (1 - x)| - 1 & (x \le 1) \\ |2 - (x - 1)| - 1 & (x > 1) \end{cases} \\
&= \begin{cases} (1 + x) - 1 & (-1 \le x \le 1) \\ -(1 + x) - 1 & (x < -1) \\ (3 - x) - 1 & (1 < x \le 3) \\ -(3 - x) - 1 & (3 < x) \end{cases} \\
&= \begin{cases} x & (-1 \le x \le 1) \\ -x - 2 & (x < -1) \\ 2 - x & (1 < x \le 3) \\ x - 4 & (3 < x) \end{cases}
\end{aligned}
$$

5.1

$f \circ f(-1) = f \circ f(3) = -1$　より，$f \circ f$は単射ではない

$f \circ f(\mathfrak{R}) = [-1, +\infty) \ne \mathfrak{R}$　より，$f \circ f$は全射ではない

5.2

証明：

(1)　$\forall P \in \wp(\mathfrak{R})$,　$f \circ f(P) = f \circ f(P)$

よって，$\forall P \in \wp(\mathfrak{R}), P \sim P$

$\sim$　は反射律をみたす。

(2)　$\forall P_1, P_2 \in \wp(\mathfrak{R})$,

$$P_1 \sim P_2 \Rightarrow f \circ f(P_1) = f \circ f(P_2) \Rightarrow f \circ f(P_2) = f \circ f(P_1) \Rightarrow P_2 \sim P_1$$

よって，$\sim$　は対称律をみたす。

(3)　$\forall P_1, P_2, P_3 \in \wp(\mathfrak{R})$,

$$P_1 \sim P_2 \wedge P_2 \sim P_3 \Rightarrow f \circ f(P_1) = f \circ f(P_2) \wedge f \circ f(P_2) = f \circ f(P_3)$$

$$\Rightarrow\ f\circ f(P_1) = f\circ f(P_3) \Rightarrow P_1 \sim P_3$$

よって，$\sim$ は推移律をみたす。

$(1), (2), (3)$より　$\sim$ が$\wp(\Re)$上の同値関係である。

Q.E.D.

5.3

$C(P)$

$= \{S \in \wp(\Re) \mid S \sim P\}$

$= \{S \in \wp(\Re) \mid f\circ f(S) = f\circ f(P)\}$

$= \{S \in \wp(\Re) \mid f\circ f([0,1))\}$

$$\forall a \in (0,1), \qquad f\circ f([0,a] \cup (1,1+a]) = [0,1)$$

よって

$$\forall a \in (0,1), \qquad [0,a] \cup (1,1+a] \in C(P)$$

即ち

$$\{[0,a] \cup (1,1+a] \mid a \in (0,1)\} \subset C(P)$$

$\{[0,a] \cup (1,1+a] | a \in (0,1)\}$ が $(0,1)$ と対等で，無限集合であることが明らかなので，$C(P)$が無限集合であり，有限集合ではない。

開閉区間 $(1,2]$ は$C(P)$の元である。

閉開区間 $[0,1)$は$C(P)$の元である。