数理工学第一　期末試験略解　　　　2010 年 7 月 27 日実施

問題 1

(1) 各点の定義は次のようになる

- 触点：A の閉包 $\bar{A} = A^i \cup A^b$ 上の点を A の触点という．
- 集積点：点 $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ が $A - \{\boldsymbol{x}\}$ の触点であるとき，$\boldsymbol{x}$ を A の集積点という．
- 孤立点：点 $\boldsymbol{x} \in A$ が A の集積点でないとき，$\boldsymbol{x}$ を孤立点という．

(2) $B^i \cup C^i = \emptyset$ であれば明らかに成り立つ．以下では $B^i \cup C^i \neq \emptyset$ とする．

$\boldsymbol{x} \in B^i \cup C^i$ をとる．このとき，$\boldsymbol{x} \in B^i$ または $\boldsymbol{x} \in C^i$ となる．$\boldsymbol{x} \in B^i$ のとき，ある $\epsilon > 0$ が存在して，$B(\boldsymbol{x}, \epsilon) \subset B \subset B \cup C$ となる．したがって $B(\boldsymbol{x}, \epsilon) \subset B \cup C$ となり，$\boldsymbol{x} \in (B \cup C)^i$ となる．$\boldsymbol{x} \in C^i$ のときも同様にして $\boldsymbol{x} \in (B \cup C)^i$ がいえる．以上により，$\boldsymbol{x} \in B^i \cup C^i \Rightarrow \boldsymbol{x} \in (B \cup C)^i$ となり，$B^i \cup C^i \subset (B \cup C)^i$ が成り立つ．

(3) $\Re$ 上で考える．$B = [0, 1]$，$C = [1, 2]$ とする．このとき，$1 \notin (0, 1) \cup (1, 2) = B^i \cup C^i$ および $1 \in (0, 2) = (B \cup C)^i$ となり，左辺の集合と右辺の集合は等しくならない．

問題 2

(1)

$$\begin{aligned} D &= \{(x_1, x_2) |\ \max\{|x_1|, 2|x_2|\} < 2\} \\ &= \{(x_1, x_2) |\ |x_1| < 2, 2|x_2| < 2\} \\ &= \{(x_1, x_2) |\ -2 < x_1 < 2, -1 < x_2 < 1\} \end{aligned}$$

となる．よって集合 D を図示すると次のようになる．境界は含まない．

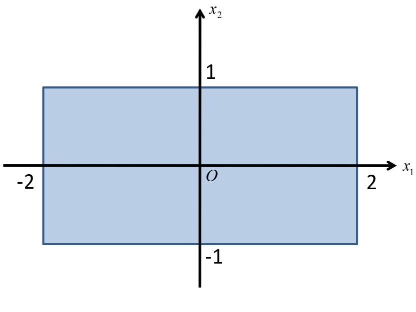

図 1　集合 D の図示

(2) $\boldsymbol{p} = (1, 0)$ とする．内点の定義より，ある $\epsilon > 0$ がとれて，$B_\infty(\boldsymbol{p}, \epsilon) \subset D$ となることを言えばよい．距離関数 d_∞ のもとでの球 $B_\infty(\boldsymbol{p}, \epsilon)$ は

$$\begin{aligned} B_\infty(\boldsymbol{p}, \epsilon) &= \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Re^2 |\ d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) < \epsilon\} \\ &= \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Re^2 |\ \max\{|x_1 - 1|, |x_2 - 0|\} < \epsilon\} \\ &= \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Re^2 |\ 1 - \epsilon < x_1 < 1 + \epsilon, \epsilon < x_2 < \epsilon\} \end{aligned}$$

となるので，図形的にいえば球 $B_\infty(\boldsymbol{p},\epsilon)$ は $\boldsymbol{p}$ を中心とする 1 辺の長さが 2ϵ の正方形になる．したがって，例えば $\epsilon=1/2$ とすれば球は D に含まれる (図 2 参照)．実際,

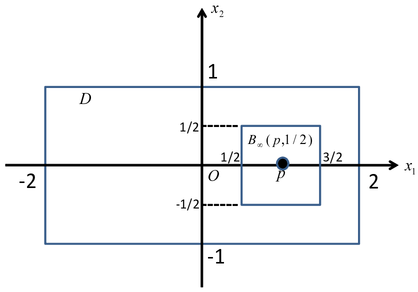

図 2　包含関係の図示

$$B_\infty(\boldsymbol{p},1/2)=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\in\Re^2|\ 1/2<x_1<3/2,\ -1/2<x_2<1/2\}$$

となり，$B_\infty(\boldsymbol{p},1/2)\subset D$ となることが容易に確認できる．

(3)$\boldsymbol{q}=(0,1)$ とする．図形的にとらえると，$\boldsymbol{q}$ を中心とするどのような半径の球であっても D および D^c と共有点を持つ (図 3 参照)．式の上でもこのことを確認する．$\epsilon>0$ とすると，$B_\infty(\boldsymbol{q},\epsilon)$

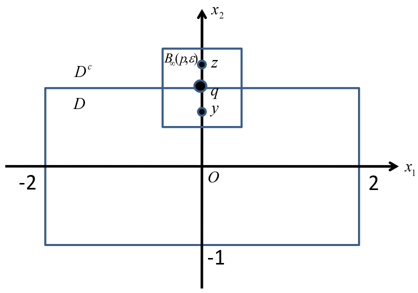

図 3　包含関係の図示

は

$$B_\infty(\boldsymbol{q},\epsilon)=\{(x_1,x_2)|\ -\epsilon<x_1<\epsilon,1-\epsilon<x_2<1+\epsilon\}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{y}=(0,1-\epsilon/2)$，$\boldsymbol{z}=(0,1+\epsilon/2)$ とすると，$\boldsymbol{y}\in B_\infty(\boldsymbol{q},\epsilon)$，$\boldsymbol{y}\in D$ および $\boldsymbol{z}\in B_\infty(\boldsymbol{q},\epsilon)$，$z\in D^c$ となる．したがって，$\boldsymbol{q}$ は D の内点でも外点でもないので D の境界点である．

問題 3

ユークリッド空間 $\Re^2$ における開集合系を $\mathcal{D}$ とする．位相 $(\Re^2,\mathcal{D})$ のもとで，E の内部 E^i，外

部 E^e，境界 E^b は

$$\begin{array}{l} E^i = \{(x_1, x_2) |\ x_1^2 + x_2^2 < 1\} \\ E^e = \{(x_1, x_2) |\ x_1^2 + x_2^2 > 1\} \\ E^b = \{(x_1, x_2) |\ x_1^2 + x_2^2 = 1\} \end{array}$$

となる．

$\mathcal{D}_0 = \{\emptyset, \Re^2\}$ とする．密着位相 $(\Re^2, \mathcal{D}_0)$ のもとでは E の内部 E^i，外部 E^e，境界 E^b は

$$\begin{array}{l} E^i = \emptyset \\ E^e = \emptyset \\ E^b = \Re^2 \end{array}$$

となる．

$\mathcal{D}_1 = 2^{\Re^2}$ とする．離散位相 $(\Re^2, \mathcal{D}_1)$ のもとでは E の内部 E^i，外部 E^e，境界 E^b は

$$\begin{array}{l} E^i = \{(x_1, x_2) |\ x_1^2 + x_2^2 < 1\} \\ E^e = \{(x_1, x_2) |\ x_1^2 + x_2^2 \geq 1\} \\ E^b = \emptyset \end{array}$$

となる．以上のような例を用いて説明すればよい．

問題 4

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S,\ \alpha \in [0, 1]$ とする．このとき，$\alpha\boldsymbol{x} + (1 - \alpha)\boldsymbol{y} \in S$ となることを示せばよい．そこで任意の $\boldsymbol{z} \in \Re^n$ に対して $f(\alpha\boldsymbol{x} + (1 - \alpha)\boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{z})$ となることを示す．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は大域的最小解であるから，$f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{z})$ かつ $f(\boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{z})$ となる．このことを踏まえると，

$$\begin{array}{rl} f(\alpha\boldsymbol{x} + (1 - \alpha)\boldsymbol{y}) & \leq \alpha f(\boldsymbol{x}) + (1 - \alpha) f(\boldsymbol{y}) \\ & \leq \alpha f(\boldsymbol{z}) + (1 - \alpha) f(\boldsymbol{z}) \\ & = f(\boldsymbol{z}) \end{array}$$

となり，$f(\alpha\boldsymbol{x} + (1 - \alpha)\boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{z})$ となる．以上により題意が成り立つ．