数理工学第一　中間試験解答例　　2011 年 5 月 31 日

問題 1

(1) 命題 p, q, r からなる複合命題 $(p \to q) \wedge (q \to r)$ の真偽値表を書きなさい.

(2) 以下は実数列 $\{x_1, x_2, \ldots\}$ が $\bar{x}$ に収束することの定義である．この否定を示し，その意味を文章で述べなさい．ただし，$\Re$ は実数の集合，$\Re_+$ は正の実数の集合，$\mathcal{N}$ は自然数の集合を意味する.

$$\forall \epsilon \in \Re_+,\ \exists n_0 \in \mathcal{N},\ \forall n \in \mathcal{N},\ (n \geq n_0\ \ \to |x_n - \bar{x}| < \epsilon).$$

解答

(1) 真偽値表を書くと，次のようになる.

表 1　真偽値表

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

(2) 否定を式の形で書くと次のようになる.

$$\exists \epsilon \in \Re_+,\ \forall n_0 \in \mathcal{N},\ \exists n \in \mathcal{N},\ (n \geq n_0 \wedge |x_n - \bar{x}| \geq \epsilon)$$

その意味は,「ある正の数 ϵ が存在して，任意の自然数 n_0 に対して，$n \geq n_0$ かつ $|x_n - \bar{x}| \geq \epsilon$ となるような自然数 n が存在する」.

問題 2

$\mathcal{N}$ を自然数の集合とする．集合族 $(A_n)_{n \in \mathcal{N}}$ は，n が奇数のとき $A_n = (1/n, 1 + 1/n)$，n が偶数のとき $[1/n, 1 + 1/n]$ により定められている．このとき，$\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ を求め，それを証明せよ (答えだけの解答は得点を与えない).

解答

$x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ とする．もし $x \leq 0$ ならば，任意の自然数 n に対して $x \leq 0 < 1/n$ だから $x \notin A_n$ となる．よって，$x > 0$ である．また，$x \geq 2$ であるとすると，任意の奇数 n に対して,

$1+1/n \leq 2 \leq x$ だから $x \notin A_n$，任意の偶数 n に対して $1+1/n \leq 1+1/2 < 2 \leq 2$ だから $x \notin A_n$ となる．従って $x < 2$ である．以上により $x \in (0,2)$ となり，$\cup_{n=1}^{\infty} A_n \subset (0,2)$ となる．

逆に $x \in (0,2)$ とする．もし $x \in (1,2)$ ならば $x \in A_1$ であるので $x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ となる．$x \in (0,1)$ である場合を考える．このとき，$n' \in \mathcal{N}$ を十分大きく取れば，$1/n' < x$ となる．このとき，$1/n' < x < 1+1/n'$ だから $x \in A_{n'}$ となるので $x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ である．

以上により，$\cup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,2)$ となる．

問題 3

Z を整数の集合とする．いま，素数 p が与えられている．このとき，$a, b \in Z$ は $a-b$ が p で割り切れるとき，p に関して合同であるといい，$a \equiv b \pmod p$ と書く．

1. 関係 $\equiv \pmod p$ は Z における同値関係であることを証明しなさい．
2. $A = \{1, 2 \ldots, p-1\}$ とする．また，p の倍数でない正の整数 q が与えられている．このとき，任意の $x \in A$ に対して $f(x)$ を
$$f(x) \equiv qx \pmod p,\ f(x) \in A$$
と定める．このように定めた $f(x)$ が単射であることを証明しなさい．
3. $f(x)$ が全射であることを証明しなさい．

解答

(1) 反射律：任意の整数 a に対して，$a-a = 0 = 0 \cdot p$ だから $a \equiv a \pmod p$.
対称律：整数 a, b について，$a \equiv b$ とする．このとき $a-b$ は p の倍数だから，$b-a = -(a-b)$ もまた p の倍数である．よって，$b \equiv a \pmod p$ となる．
推移律：整数 a, b, c が $a \equiv b$，$b \equiv c$ を満たすとする．このとき，$a-c = (a-b)+(b-c)$ であり，仮定より $a-b$，$b-c$ は p の倍数だから，$a-c$ は p の倍数である．よって $a \equiv c \pmod p$ となる．以上により関係 $\equiv \pmod p$ は Z における同値関係である．

(2) $i, j \in A$ とする．このとき，$f(i) = f(j) \Rightarrow i = j$ を示せばよい．$f(i) = f(j)$ とする．このとき，
$$qi \equiv f(i) = f(j) \equiv qj$$
だから $qi \equiv qj \pmod p$ となる．このとき $qi - qj = q(i-j)$ は p の倍数であるが，p は素数であり，q は p の倍数ではないので $i-j$ が p の倍数である．ここで，$1 \leq i \leq p-1$，$1 \leq j \leq p-1$ より $-p+2 \leq i-j \leq p-2$ となる．従って $i-j = 0$ となり，$i = j$ が成り立つ．

(3) f は単射であるから，$f(1)$，$f(2), \ldots, f(p-1)$ はすべて異なるので，f の像 $f(A) = \{f(1), f(2), \ldots, f(p-1)\}$ の要素の個数は $p-1$ 個である．もし f が全射でなかったら，その像 $f(A)$ の要素の個数は $p-2$ 個以下であるが，これは矛盾である．従って，f は全射である．

問題 4

1. 順序関係の定義を述べなさい.
2. 全順序関係の定義を述べなさい.
3. 順序関係であるが，全順序関係でない例を一つ挙げなさい.

解答

(1) 集合 A における関係 O が次の 3 条件

1. 任意の $a \in A$ に対して aOa
2. 任意の $a, b \in A$ に対して $aOb,\ bOa \Rightarrow a = b$
3. 任意の $a, b, c \in A$ に対して $aOb,\ bOc \Rightarrow aOc$

を満たすとき，O を A における順序関係という.

(2) 集合 A における順序関係 O' が「任意の $a, b \in A$ に対して $(aO'b) \vee (bO'a)$」を満たすとき，O' を A における全順序関係という.

(3) 集合 $B = \{1, 2\}$ のべき集合 2^B を考える．2^B において，集合の包含関係 $\subset$ は順序関係になる．しかし，$\{1\}, \{2\} \in 2^B$ に対して $\{1\} \not\subset \{2\}$, かつ $\{2\} \not\subset \{1\}$ となるので，2^B における包含関係 $\subset$ は順序関係であるが，全順序関係ではない.