数理工学第一　中間試験　　2011 年 5 月 31 日

- 問題は全部で 4 題ある．
- すべての解答用紙に学籍番号と名前を書くこと．
- 解答の途中経過も要領よく記すこと．

問題 1

(1) 命題 p, q, r からなる複合命題 $(p \to q) \wedge (q \to r)$ の真偽値表を書きなさい．

(2) 以下は実数列 $\{x_1, x_2, \dots\}$ が $\bar{x}$ に収束することの定義である．この否定を示し，その意味を文章で述べなさい．ただし，$\Re$ は実数の集合，$\Re_+$ は正の実数の集合，$\mathcal{N}$ は自然数の集合を意味する．

$$\forall \epsilon \in \Re_+,\ \exists n_0 \in \mathcal{N},\ \forall n \in \mathcal{N},\ (n \geq n_0\ \to |x_n - \bar{x}| < \epsilon).$$

問題 2

$\mathcal{N}$ を自然数の集合とする．集合族 $(A_n)_{n \in \mathcal{N}}$ は，n が奇数のとき $A_n = (1/n, 1 + 1/n)$，n が偶数のとき $[1/n, 1 + 1/n]$ により定められている．このとき，$\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ を求め，それを証明せよ (答えだけの解答は得点を与えない)．

問題 3

Z を整数の集合とする．いま，素数 p が与えられている．このとき，$a, b \in Z$ は $a - b$ が p で割り切れるとき，p に関して合同であるといい，$a \equiv b \pmod{p}$ と書く．

1. 関係 $\equiv \pmod{p}$ は Z における同値関係であることを証明しなさい．
2. $A = \{1, 2 \dots, p-1\}$ とする．また，p の倍数でない正の整数 q が与えられている．このとき，任意の $x \in A$ に対して $f(x)$ を

$$f(x) \equiv qx \pmod{p},\ f(x) \in A$$

   と定める．このように定めた $f(x)$ が単射であることを証明しなさい．
3. $f(x)$ が全射であることを証明しなさい．

問題 4

1. 順序関係の定義を述べなさい．
2. 全順序関係の定義を述べなさい．
3. 順序関係であるが，全順序関係でない例を一つ挙げなさい．