数理工学第一　中間試験 解答例　　　　2012年5月29日

問題1

(1) 「”$x^2+y^2 \geq 2$ である” は ”$(|x| \geq 1) \vee (y \geq 1)$ である” ための十分条件である」という主張が正しいかどうかを理由とともに述べよ．

(2) 集合 A のべき集合とは何か．定義を述べよ．

解答

(1) 命題 p を”$x^2+y^2 \geq 2$ である” とし，命題 q を”$(|x| \geq 1) \vee (y \geq 1)$ である”とする．いま，$x=0,\ y=-2$ とすると，命題 p は真であるが，命題 q は偽であり，$p \to q$ は偽となる．よって，p は q であるための十分条件ではない．

(2)A の部分集合全体から成る集合を A のべき集合という．

問題2

集合 P, P_1, P_2 を集合 A の部分集合，Q を集合 B の部分集合とし，写像 $f: A \to B$ を考える．このとき，次の 2 つの関係式がそれぞれ成立するために f が満たすべき条件を述べ，各関係式を証明せよ．なお，証明では f の条件をどう使ったかを明記すること．

(1) $f(f^{-1}(Q)) = Q$.

(2) $f(P_1 \cap P_2) = f(P_1) \cap f(P_2)$.

解答

(1) 条件：f が全射であること．

(証明) まず $f(f^{-1}(Q)) \subset Q$ を示す．$y \in f(f^{-1}(Q))$ とする．このとき，ある $x \in f^{-1}(Q)$ が存在して，$y = f(x)$ と書ける．$f^{-1}(Q)$ の定義より，$f(x) \in Q$ だから $y = f(x) \in Q$ となる．したがって $f(f^{-1}(Q)) \subset Q$ となる (以上は f が全射でなくても成り立つ).

次に $Q \subset f(f^{-1}(Q))$ を示す．$y \in Q$ とする．このとき，f は全射であるから，ある x' が存在して，$y = f(x')$ と書ける．このとき，$f^{-1}(Q)$ の定義より $x' \in f^{-1}(Q)$ である．よって，$y = f(x') \in f(f^{-1}(Q))$ となる．したがって $Q \subset f(f^{-1}(Q))$ となる．以上により，$f(f^{-1}(Q)) = Q$ が示された．

(2) 条件：f が単射であること．

(証明) まず $f(P_1 \cap P_2) \subset f(P_1) \cap f(P_2)$ を示す．$y \in f(P_1 \cap P_2)$ とする．このときある $x \in P_1 \cap P_2$ が存在して，$y = f(x)$ と書ける．すると，$x \in P_1 \cap P_2 \subset P_1$ だから $y = f(x) \in f(P_1)$，同様に $y \in f(P_2)$ となる．よって $y \in f(P_1) \cap f(P_2)$ となる．したがって，$f(P_1 \cap P_2) \subset f(P_1) \cap f(P_2)$ となる (以上は f が単射でなくても成り立つ).

次に $f(P_1) \cap f(P_2) \subset f(P_1 \cap P_2)$ を示す．$y \in f(P_1) \cap f(P_2) \subset f(P_1 \cap P_2)$ とする．$y \in f(P_1)$

より，ある $x' \in P_1$ が存在して $y = f(x')$ と書ける．同様に $y \in f(P_2)$ より，ある $x'' \in P_1$ が存在して $y = f(x'')$ と書ける．すると $f(x') = y = f(x'')$ となるが，f は単射であるので $x' = x''$ である．よって $x' \in P_1 \cap P_2$ となり，$y = f(x') \in f(P_1 \cap P_2)$ となる．したがって，$f(P_1) \cap f(P_2) \subset f(P_1 \cap P_2)$ となる．以上により，$f(P_1 \cap P_2) = f(P_1) \cap f(P_2)$ が示された．

問題 3

集合 A とその部分集合系 $\mathcal{M}$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\mathcal{M}$ が A の直和分割であるとき，$\mathcal{M}$ が満たすべき条件をすべて挙げよ．
(2) 集合の直和分割の例を一つ挙げよ．

解答

(1) 次の 2 つの条件を挙げればよい．

(i) $\mathcal{M}$ に属するすべての集合の和集合が A に等しい，つまり $\cup\mathcal{M} = A$.
(ii) $\mathcal{M}$ の異なる 2 つの元は互いに素である，つまり

$$C, C' \in \mathcal{M},\ C \neq C' \Rightarrow C \cap C' = \emptyset.$$

(2) 例 1: $A = \{1,2,3,4,5\}$ とし，$\mathcal{M} = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\}$ とすると $\mathcal{M}$ は A の直和分割である．例 2: 3 で割り切れる自然数の集合を C_0，3 で割った余りが 1，2 である自然数の集合をそれぞれ C_1, C_2 とすると，$\mathcal{M} = \{C_0, C_1, C_2\}$ は自然数の集合の直和分割である．

問題 4

順序集合 $(A, \leq)$ が与えられている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 集合 A の最大元の定義を述べよ．
(2) 集合 A の極大元の定義を述べよ．
(3) 集合 A に最大元が存在するならば，それは集合 A の唯一の極大元であることを示せ．

解答

(1) 集合 A にある元 a があって，任意の $x \in A$ に対して $x \leq a$ が成り立つとき，a を A の最大元という．

(2) 集合 A の元 a に対して，$a \leq x$ かつ $x \neq a$ となるような $x \in A$ が存在しないとき，a を A の極大元という．

(3) A の最大元を $a_{\max}$ と書く．このとき $a_{\max} \leq x$ かつ $x \neq a_{\max}$ となるような $x \in A$ は存在しないので $a_{\max}$ は A の極大元である．いま，$a_{\max}$ 以外に A の極大元 a' が存在したとする．このとき，$a_{\max}$ は A の最大元だから $a' \leq a_{\max}$ であり，仮定より $a' \neq a_{\max}$ であるが，これは a' が A の極大元であることに矛盾する．したがって，$a_{\max}$ 以外に A の極大元は存在しない．