

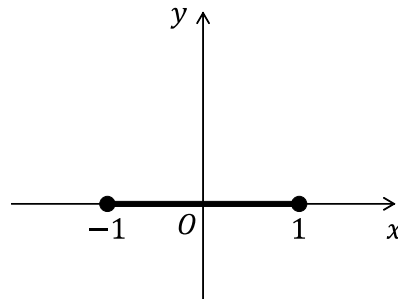
数理工学第一 期末試験 (2013年8月6日) 略解

■問題 1

- (1) テキスト (宮川・水野・矢島: 経営工学の数理 I) の 6.2 節【濃度の大小】を見よ.
- (2) 写像 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}(\text{odd})$ を $f(n) = 2n - 1$ と定義すれば写像 f は全単射となるので, \mathbb{N} は $\mathbb{N}(\text{odd})$ と対等である.

■問題 2

- (1)



- (2) テキスト (宮川・水野・矢島: 経営工学の数理 I) の演習問題 7.3 を見よ.

■問題 3

- (1) テキスト (宮川・水野・矢島: 経営工学の数理 I) の演習問題 8.1 を見よ.
- (2) 【 $\alpha \neq 0$ の場合】任意の点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta = \varepsilon/|\alpha| > 0$ とすると, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ ならば

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\alpha\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y}\| = |\alpha| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < |\alpha|\delta = \varepsilon$$

となるので, f は連続写像である.

【 $\alpha = 0$ の場合】任意の点 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|0\mathbf{x} - 0\mathbf{y}\| = \|\mathbf{0} - \mathbf{0}\| = 0 < \varepsilon$$

となるので, f は連続写像である.

■問題 4

- (1) テキスト (宮川・水野・矢島: 経営工学の数理 I) の演習問題 11.4 を見よ.
- (2) 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ と任意の $\alpha \in [0, 1]$ に対して,

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y) - f((1 - \alpha)x + \alpha y) &= (1 - \alpha)x^2 + \alpha y^2 - ((1 - \alpha)x + \alpha y)^2 \\ &= \dots = \alpha(1 - \alpha)(x - y)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

より, $f(x) = x^2$ は凸関数である.