数理工学第一 期末試験（2013 年 8 月 6 日）

- 試験時間は 90 分とする.
- すべての解答用紙に学籍番号, 氏名, 問題番号を必ず記入すること.
- 解答用紙を持ち帰ることは不正行為とみなされる. すべての解答用紙を必ず提出すること.
- 答えは結果のみではなく, 導出過程も要領よく記すこと. ただし, 解答に不要な記述は減点の対象とする.

■問題 1

(1) 集合 A の濃度が集合 B の濃度を超えないことと同値な条件を三つ述べよ.

(2) 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ が奇数の自然数全体の集合 $\mathbb{N}(\mathrm{odd})$ と対等であることを示せ.

■問題 2

(1) 2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ における集合 $M = \{(x, y) \mid -1 < x < 1,\ y = 0\} \cup \{(0, 1)\}$ の集積点全体の集合を求め, それを図示せよ.

(2) a_1, a_2, b_1, b_2 を $a_1 < b_1,\ a_2 < b_2$ であるような実数とするとき, 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の開区間 $M = \{(x_1, x_2) \mid a_1 < x_1 < b_1,\ a_2 < x_2 < b_2\}$ が開集合となることを証明せよ.

■問題 3

(1) 集合 $\mathbb{R}^n$ 上の任意の点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ に対して,

$$d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$$

と定義するとき, d_∞ が $\mathbb{R}^n$ 上の距離となることを示せ.

(2) 任意の実数 α について, 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(\boldsymbol{x}) = \alpha \boldsymbol{x}$ は n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の連続写像であることを証明せよ.

■問題 4

(1) 超平面が凸集合であることを示せ.

(2) 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f(x) = x^2$ が凸関数となることを示せ.