数理工学第一 期末試験問題
(2001年9月10日)

注意：それぞれの問題ごとに1枚の答案用紙を使用すること。すべての答案用紙に学籍番号、氏名、問題番号を忘れずに記入すること。

問題1 集合 $A = \{a, b, c, d\}$ のべき集合 2^A において包含関係 $\subset$ を順序とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 2^A の部分集合 $M_1 = \{\{a\}, \{a, b\}, \{c\}\}$ の上界をすべて示し、M_1 の上限を求めよ．

(2) 2^A から A を除いた部分集合を M_2 とするとき，M_2 の極大元をすべて示せ．

問題2 R^2 の部分集合 $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 点 $(2, 0)$ が A の外点であることを証明せよ．

(2) 集合 Aが開集合となることを証明せよ．

問題3 閉区間 $[a, b]$ 上の実数値連続関数全体の集合を $C[a, b]$ とする．任意の $f, g \in C[a, b]$ に対して、

$$d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

と定義するとき、dが $C[a, b]$ 上の距離関数となることを示せ．

問題4 **(1)** Rを環とし，その零元を0とすれば，Rの任意の元aに対し $a0 = 0a = 0$ となることを示せ．

(2) R を環とし，その零元を 0，単位元を 1 とする．もし $1 = 0$ ならば，R は零元 0 のみからなることを示せ．

(3) aが環 R の単元ならば，a の逆元が一意的に定まることを示せ．

問題5 $a^i \in R^n$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ とするとき，集合

$$C_1 = \{x : x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a^i, \alpha_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, m)\}$$

が凸錐となることを証明せよ．