数理工学第一 期末試験問題

平成１６年８月３日

問題 I (8 点 $\times$ 3). 距離空間 (X, d) を考える.

1. 距離関数 d が満たすべき４つの性質を述べよ.
2. 点 $\boldsymbol{a} \in X$ を中心とする半径 $r > 0$ の (開) 球 $B(\boldsymbol{a}, r) \subseteq X$ の定義を述べよ.
3. 集合 $M \subseteq X$ の内点の定義を述べよ.

問題 II (8 点 $\times$ 4). ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ を考える.

1. $M = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 < 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4^2 = 1 \,\} \subseteq \mathbb{R}^4$ の内部および境界をそれぞれ求めよ. (解答だけで良い.)

   $\mathbb{R}^4$ の点列 $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1,2,\ldots}$ を

$$\boldsymbol{a}_k = \begin{pmatrix} 1/k \\ 1/k \\ 1 - 3/k \\ (-1)^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

   で発生させる.

2. $k \geq 3$ に対して $\boldsymbol{a}_k \in M$ を示せ.
3. 任意の k に対して $\|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_{k+1}\| > 1$ を示せ. (これは $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1,2,\ldots}$ が収束しないことを示している.)
4. $\{\boldsymbol{a}_{2k}\}_{k=1,2,\ldots}$ が収束することを, 定義に基づいて示せ.

問題 III (12 点). 次のうち, １問を選び解答しなさい.

1. Λ を添字集合とし, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して C_λ は凸集合であるとする. このとき, $C = \cap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ は凸集合であることを証明せよ.
2. f_1, f_2 を $\mathbb{R}^n$ で定義された凸関数とするとき, $f(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{x})$ で定義される関数 f が凸関数であることを証明せよ.

問題 IV. (8 点 $\times$ 4)
実数を係数に持つ 2×2 行列の集合を $M(2, \mathbb{R})$ とする.

1. $M(2, \mathbb{R})$ は通常の行列の足し算に関して群となる. これは, どのような性質が成り立つことを意味するか, 述べよ.
2. $M(2, \mathbb{R})$ は通常の行列の足し算と掛け算に関して環となる. これは, どのような性質が成り立つことを意味するか, 述べよ.
3. $M(2, \mathbb{R})$ は可換環ではないことを, 具体例で示せ.
4. $M(2, \mathbb{R})$ は, 整域ではないことを, 具体例で示せ.

以上