数理工学第一 期末試験問題

平成１５年７月２９日

注意事項

1. 自筆の A4 サイズの紙一枚のみ持込み可である．コピーは不可．
2. それぞれの問題ごとに 1 枚の答案用紙を使用すること．
3. すべての答案用紙に学籍番号，氏名，問題番号を忘れずに記入すること．

問題 I.

1. 距離空間における球および内点の定義を述べよ．
2. 距離空間における開集合と n 次元ユークリッド空間における開集合の定義を，違いが明確になるように述べよ．

問題 II.

3 次元ユークリッド空間内に次の集合 M_1, M_2 を考える．

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \left\{ \boldsymbol{x} = (x,y,z)^T \in R^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 < 1 \right\} \\
M_2 &= \left\{ \boldsymbol{x} = (x,y,z)^T \in R^3 \mid x+y+z = 1 \right\}
\end{aligned}
$$

1. M_1^i, $(M_1 \cap M_2)^i$, $(M_1 \cup M_2)^i$, $(M_1 \cap M_2)^b$, $(M_1 \cup M_2)^b$ は具体的にどのような集合か，それぞれ答えよ．(答だけで良い．)
2. 上のそれぞれの集合が開集合かどうか，答えよ．
3. 上のそれぞれの集合が凸集合かどうか，答えよ．

問題 III.

1. f_1, f_2 を R^n で定義された凸関数, $f(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$ とする．このとき，$\mathrm{epi}\ f = \mathrm{epi}\ f_1 \cap \mathrm{epi}\ f_2$ であることを示せ．
2. f が凸関数であることを証明せよ．ただし，凸集合に関する次の定理は使って良い．

定理: F_1, $F_2 \subseteq R^n$ が凸集合のとき，$F_1 \cap F_2$ は凸集合である．

問題 IV.

実数を成分に持つ 2×2 行列の集合を $M(2,R)$ とし，$M(2,R)$ のうち，正則な行列の集合を $GL(2,R)$ とする．

1. $M(2,R)$ は通常の行列の足し算に関して群をなすことを示せ．
2. $GL(2,R)$ は, 通常の行列の足し算に関して群をなさないことを示せ．
3. $M(2,R)$ は, 通常の行列の乗算に関して群をなさないことを示せ．
4. $GL(2,R)$ は, 通常の行列の乗算に関して群をなす．この群が可換群ではないことを示せ．

以上