数理工学第一 期末試験問題

平成１７年８月２日

注意事項

1. それぞれの問題ごとに１枚の答案用紙を使用すること．
2. すべての答案用紙に学籍番号，氏名，問題番号を忘れずに記入すること．

問題 I. $\boldsymbol{a} = (2,0)^T \in \mathbb{R}^2$ と $A = \{\,(x_1,x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1x_2 = 0\,\} \subseteq \mathbb{R}^2$ を考える．

この２次元空間がユークリッド空間（つまり通常の空間）である場合，次の１と２に答えよ．

1. $\boldsymbol{a}$ は A の内点かどうか，定義に基づいて答えよ．
2. A の境界は具体的にどのような集合か答えよ．(答えだけで良い)

２次元空間として，距離関数が $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} |x_1 - y_1| & (x_2 = y_2) \\ |x_1 - y_1| + 1 & (x_2 \neq y_2) \end{cases}$ と定義される距離空間をとる場合，次の３と４に答えよ．なお $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が距離関数であることは証明しなくてよい．

3. $\boldsymbol{a}$ は A の内点かどうか，定義に基づいて答えよ．
4. A の境界は具体的にどのような集合か答えよ．(答えだけで良い)

問題 II.

1. ４つの要素からなる集合 $S = \{a,b,c,d\}$ において，部分集合系

$$\mathcal{D} = \big\{\{a,d\},\{b\},\{a,c,d\},\{c\},S\big\}$$

   は位相とはならない．これに３つの部分集合を加えることで位相にせよ．(答えだけで良い)

2. 位相空間における点列の収束および写像の連続の定義を述べよ．

問題 III.

1. $M = \{\,(x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 \geq \sqrt{x_2^2 + x_3^2}\,\} \subseteq \mathbb{R}^3$ が凸錐であることを示せ．
   ただし，不等式 $\big(\sum_{i=1}^n a_ib_i\big)^2 \leq \big(\sum_{i=1}^n a_i^2\big)\big(\sum_{i=1}^n b_i^2\big)$ が成り立つことを使って良い．
2. 関数 $f(x) = x\sin x$ が凸関数でないことを示せ．

問題 IV.

２次元（ユークリッド）空間上の正方形のうちで，面積が１であり４つの頂点の座標 (x 座標と y 座標) が全て自然数となるものについて考える．そのような正方形を集めた集合を Q としよう．集合 Q の濃度が $\aleph_0$（アレフ・ゼロ）となることを示せ．

以上