

# 数理工学第一 期末試験問題 2002年7月29日

注意：それぞれの問題ごとに1枚の答案用紙を使用すること。すべての答案用紙に学籍番号、氏名、問題番号を忘れずに記入すること。

## 問題 1

集合  $S = \{(x, y) : |x| < 1, |y| < 1\}$  と、関数  $f(x, y) = x^2 + y^2$  について考える。

1.  $S$  が開集合であることを示せ。
2.  $f$  が凸関数であることを示せ。
3. 集合  $\{f(x, y) : (x, y) \in S\}$  の最大元・上界・上限を示せ。もし存在しなければその理由を簡単に述べよ。

## 問題 2

$X$  を空でない集合とし、 $d$  を  $X$  上で定義された距離関数とする。 $a$  を  $X$  のある元としたとき、写像  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x) = d(x, a)$  で定義する。このとき  $f$  が連続写像であることを証明せよ。ただし、 $\mathbb{R}$  上では通常の距離（差の絶対値）をとる。

## 問題 3

2次元のベクトル空間  $\mathbb{R}^2$  の部分集合として  $C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y \right\}$  を取る。そして、任意の  $a, b \in \mathbb{R}^2$  に対し、 $a - b \in C$  であるとき  $b \leq a$  と書く。すると、関係  $\leq$  は  $\mathbb{R}^2$  における順序関係となる。このとき、以下の問いに答えよ。

1. 集合  $C$  が凸錐であることを示せ。
2.  $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x \right\}$  とするとき、 $W$  の全ての極大元ならびに極小元を求めよ。（答えだけで良い）

## 問題 4

$S = \{1, 2, 3, 4\}$  とする。また、任意の  $a, b \in S$  に対し、 $a * b$  を  $a$  と  $b$  の積を5で割った余りと定義する。このとき、 $S$  は  $*$  を算法として可換群をなすことを証明せよ。