数理工学第一　期末試験問題　　２００７年7月３１日

注意：　・すべての答案用紙に学籍番号、氏名、問題番号を忘れずに記入すること。
　　　　・答えは結果のみではなく、導出過程も要領よく記述すること。

問題１

1. $M_1 = \{(x, y) \in \Re^2 \ \mid \ 0 < |x| \leq 1,\ 0 \leq |y| < 1\}$ とする。M_1 の内部・外部・境界を求めよ。（答えだけ述べれば良い）
2. $M_2 = \{(x, y) \in \Re^2 \mid x + y > 1\} \cup \left\{ \left(\frac{2}{n}, 0 \right) \in \Re^2 \mid n \in \mathcal{N} \right\}$ とする。M_2 の全ての集積点と孤立点を求めよ。（答えだけ述べれば良い）

問題２

(X, d_1) を距離空間とする。任意の $x, y \in X$ に対し、X^2 から $\Re$ への関数 d_2 を

$$d_2(x, y) = \frac{d_1(x, y)}{1 + d_1(x, y)}$$

と定義する。このとき、次の問いに答えよ。

1. 距離関数 d_1 が満たしている条件を全て挙げよ。
2. (X, d_2) が距離空間となることを示せ。

問題３

$(S_1, \mathcal{D}_1)$ と $(S_2, \mathcal{D}_2)$ は共に位相空間である。また、$f : S_1 \to S_2$ を連続写像とする。このとき、以下の問いに答えよ。

1. 次の 2 つの定義を述べよ。
   - S_1 上の点列 $(x_k)_{k \in \mathcal{N}}$ が $\overline{x} \in S_1$ に収束する
   - $f : S_1 \to S_2$ が連続写像である
2. S_1 上の点列 $(x_k)_{k \in \mathcal{N}}$ が $\overline{x} \in S_1$ に収束するならば、S_2 上の点列 $\Big(f(x_k) \Big)_{k \in \mathcal{N}}$ は $f(\overline{x}) \in S_2$ に収束することを示せ。

問題４

$\Re^2$ 上の４点からなる集合 $M = \{(1, 1), (1, 5), (2, 3), (4, 2)\}$ について、以下の問いに答えよ。

1. $(2, 2) \in \Re^2$ を M の 4 つの点の凸結合で表せ。答えの中の一つを挙げればよい。
2. 集合 M の凸包を、３つの半空間の共通部分として表現したい。そのような３つの半空間を述べよ。