数理工学第一　期末試験問題　　　２００８年８月５日

注意：　・すべての答案用紙に学籍番号、氏名、問題番号を忘れずに記入すること。
　　　　・答えは結果のみではなく、導出過程も要領よく記述すること。

問題１

ユークリッド空間 $\Re^2$ 上の部分集合として、$P_n = \{(x,y) \in \Re^2 \mid 1 - \frac{1}{n} < x^2 + y^2 \leq 4 + \frac{1}{n}\}$ と定める。次の 5 つの集合の中で、開集合であるもの閉集合であるものをそれぞれ全て選べ（答えだけ述べれば良い)。ただし、P^i は P の内部、$\overline{P}$ は P の閉包を意味する。

$$P_1, \quad P_2^i, \quad \overline{P_3}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n^i, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{P_n}$$

問題２

$\Re^2$ の元 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ に対し、以下のように距離関数 d_1, d_2 を定める。

$$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

このとき、次の問いに答えよ。

1. d_1 か d_2 の <u>どちらかを選び</u>、それが実際に距離関数であることを示せ。
2. 点列 $(\boldsymbol{x}_n)_{n \in \mathcal{N}}$ と $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Re^2$ がある。「距離空間 $(\Re^2, d_1)$ において、点列 $(\boldsymbol{x}_n)_{n \in \mathcal{N}}$ が $\bar{\boldsymbol{x}}$ に収束する」ことと、「距離空間 $(\Re^2, d_2)$ において、点列 $(\boldsymbol{x}_n)_{n \in \mathcal{N}}$ が $\bar{\boldsymbol{x}}$ に収束する」ことが必要十分であることを示せ。

問題３

1. 空でない集合 S とその部分集合系 $\mathcal{D}$ がある。$\mathcal{D}$ が S の位相となるための条件を全て挙げよ。
2. a より大きく b より小さい数の集合を $O_{ab} = \{x \in \Re \mid a < x < b\}$ と表す。ただし、$a \geq b$ のときは $O_{ab} = \emptyset$ とする。$\Re$ の部分集合系 $\{O_{ab}\}_{a,b \in \Re} \cup \{\emptyset, \Re\}$ が、$\Re$ の位相であるかどうか述べよ。また、その理由を説明せよ。

問題４

$\Re^3$ 上の部分集合 $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Re^3 \mid x_1 x_2 \geq x_3^2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$ が、凸錐であることを示せ。ヒント：相加相乗平均の定理（$\alpha, \beta \geq 0$ に対し $\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$ ）を使うとよい。