数理工学第一　期末試験問題　　　　２００９年８月４日

- 問題用紙は 2 枚あり，問題は全部で 5 題ある．
- すべての解答用紙に学籍番号と名前を書くこと．
- 解答の途中経過も要領よく記すこと．

問題１

$A = \{x \in \Re | \sin x = 0\}$ とする．A から $\mathcal{N}$ への全単射の例を一つ示し，A が可算集合であることを示せ．

問題２

この問題では，集合 $M \subset \Re^n$ の閉包について考察する．M の閉包 $\bar{M}$ は M の内部 M^i と M の境界 M^b を用いて，$\bar{M} = M^i \cup M^b$ と定義されるのであった．実は，閉包は点列の収束と深い関係があり，

$$\bar{M} = \{x | x \text{ に収束するような } M \text{ 内の点列 } (x_k)_{k \in \mathcal{N}} \text{が存在する } \}$$

という関係が成り立つ．以下のステップにしたがって，この関係式を証明しよう．なお，以下では上の関係式の右辺の集合を L とする．

1. $\Re^n$ における点列 $(x_k)_{k \in \mathcal{N}}$ が x に収束することの開球を用いた定義を述べよ．
2. $\bar{M} \subset L$ を示す．
   (イ) $x \in M^i$ のとき，$x \in L$ であることを示す．
   (ロ) $x \in M^b$ のとき，$x \in L$ であることを示す．
   (ヒント) $x \in M^b$ のとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して $B(x, \epsilon) \cap M \neq \emptyset$ であることを利用する．
3. $L \subset \bar{M}$ を示す．
   (ヒント) $\Re^n = M^i \cup M^b \cup M^e$ だから，$x \in L$ のとき $x \notin M^e$ であることを示す．

問題３

1. 位相とは何か．40 字程度で答えよ．
2. n 次元ユークリッド空間から m 次元ユークリッド空間への写像 $f : \Re^n \to \Re^m$ が点 x で連続であることの開球を用いた定義を述べよ．

問題 4

定数 $\alpha \in \Re$ に対し，第 k 項を $x_k = \alpha^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ とする数列 $(x_k)_{k \in \mathcal{N}}$ を考える．この数列が収束するかどうかは，α の値と位相をどう取るかに依存する．$\mathcal{D}_1$ をユークリッド空間における開集合系，$\mathcal{D}_2$ を離散位相 $(\mathcal{D}_2 = 2^{\Re})$, $\mathcal{D}_3$ を密着位相とする $(\mathcal{D}_3 = \{\Re, \emptyset\})$.

1. ある位相の元では，α の値によらず，数列は任意の値に収束した．このときの位相は $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ のうちのどれか．ただし，収束することの証明は不要である (以下同).

2. ある位相の元では，有限個の α に対してのみ数列が収束した．このときの位相は $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ のうちのどれか．また，α の値と収束値を求めよ．

3. ある位相の元では，数列が収束するような α の集合は非加算集合 I となった．ただし，$I \neq \Re$ とする．このときの位相は $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ のうちのどれか．また，集合 I，および数列の収束値を求めよ．

問題 5

$\Re^2$ における閉球 $B(\mathbf{0}, 1) = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ と点 $p = (0, 2)$ がある．集合 $B(\mathbf{0}, 1) \cup \{p\}$ の凸包を図示し，その面積を求めよ．