数理工学第一 期末試験問題

(2006年8月1日（火）13:20–14:50)

注意：それぞれの問題ごとに1枚の答案用紙を使用すること。すべての答案用紙に学籍番号、氏名、問題番号を忘れずに記入すること。

問題1 集合 A と B がともにたかだか可算な集合であるならば，和集合 $A \cup B$ もたかだか可算な集合であることを証明せよ．

問題2 2次元ユークリッド空間 R^2 の部分集合 $A = \{(x,y) | |x| + |y| < 1\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 集合 A を図示せよ．

(2) 点 $(1,1)$ が A の外点であることを外点の定義に基づき証明せよ．

(3) 集合 A が開集合となることを開集合の定義に基づき証明せよ．

問題3 閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続関数全体の集合を $C[a,b]$ とする．任意の $f,g \in C[a,b]$ に対して、

$$d(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

と定義するとき、d が $C[a,b]$ 上の距離関数となることを証明せよ．

問題4 次のユークリッド空間の部分集合について，それぞれ部分空間，アフィン集合，錐，凸集合，閉集合であるかどうか調べ，答え (○または×) を表にして，答案用紙に書け．

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{(x_1,x_2) \in R^2 | |x_1| \geq x_2\} \\
S_2 &= \{(1,1) \in R^2\} \\
S_3 &= \emptyset \quad (R^2 \text{ における空集合}) \\
S_4 &= \{(x_1,x_2) \in R^2 | x_1 x_2 = 0\} \\
S_5 &= \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3 | x_1 + x_2 = 0, x_3 > 0\}
\end{aligned}$$

ここで，R^2 と R^3 は，それぞれ2次元と3次元のユークリッド空間を表す．

問題5 集合 $G = \{5^n | n \in Z\}$ が実数の乗法について群をなすことを証明せよ．ここで，Z は整数全体の集合を表す．