

数理工学第一 期末試験問題

2010 年 7 月 27 日

- 問題は全部で 4 題ある .
- すべての解答用紙に学籍番号と名前を書くこと .
- 解答の途中経過も要領よく記すこと .

問題 1

- (1) ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の部分集合 A の触点, 集積点, 孤立点の定義を述べよ .
- (2) \mathbb{R}^n の部分集合 B, C に対して, 関係式

$$(B^i \cup C^i) \subset (B \cup C)^i$$

が成り立つことを証明せよ .

- (3) (2) において, 左辺の集合と右辺の集合が等しくない例を一つ挙げよ .

問題 2

\mathbb{R}^2 において, 距離関数 d_∞ を任意の $x = (x_1, x_2)$ と $y = (y_1, y_2)$ に対して

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

と定義する . また, 集合 $D = \{(x_1, x_2) \mid \max\{|x_1|, 2|x_2|\} < 2\}$ を考える .

- (1) D を図示せよ .
- (2) $(1, 0)$ が距離空間 (\mathbb{R}^2, d_∞) における D の内点であることを定義に基づいて示せ .
- (3) $(0, 1)$ が距離空間 (\mathbb{R}^2, d_∞) における D の境界点であることを定義に基づいて示せ .

問題 3

\mathbb{R}^2 上の部分集合 $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ がある . \mathbb{R}^2 に導入する位相によって E の内部, 外部, 境界のいずれかが異なることがあることを例を挙げて説明せよ .

問題 4

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を凸関数とし, f の大域的最小解の集合 S が空でないとする . このとき, S が凸集合であることを証明せよ .