オペレーションズリサーチ 2010(3) 2次計画問題

水野 眞治 (西 9-520 号室)、中田 和秀 (西 9-521 号室)，北原知就（西 9-425 号室）

本資料は，参考文献 [1] をもとにしている．

4 2次計画問題

4.1 2次計画問題の例

問題 4.1 (ポートフォリオ選択問題) n 種の金融資産 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ からなる市場において，ポートフォリオを組み，一定の期間運用する．ここで，ポートフォリオとは，資金 w をそれぞれの資産 S_i に x_i の割合で投資したもののことである．ただし，各資産への投資割合 x_i は非負であり，その和 $\sum_{i=1}^n x_i$ が 1 であるとする．

資産 S_i の現在価格を p_i とし，期末の未知の価格を $\tilde{p}_i$ とするとき，$r_i = \frac{\tilde{p}_i - p_i}{p_i}$ を資産 S_i の収益率という．この収益率 r_i を確率変数とみることができ，その期待値 $\bar{r}_i$ と分散 σ_i^2 が既知であるとする．また，資産 S_i と S_j の収益率 r_i と r_j の共分散 $\sigma_{ij}(\sigma_{ii} = \sigma_i^2)$ も既知であるとする．各資産 $S_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ に x_i の割合で投資したポートフォリオの収益率を r とするとき，その期待値が μ 以上となる条件のもとで，収益率 r の分散が最小となるポートフォリオを求める問題を定式化せよ．

4.2 制約のない凸 2 次計画問題

制約のない 2 次計画問題は

$$\text{最小化} \quad f(\boldsymbol{x}) = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \tag{1}$$

と表され，2 次関数の最小化問題である．ここで，n を自然数するとき，$\boldsymbol{Q} \in \mathcal{R}^{n\times n}$ が定数行列，$\boldsymbol{c} \in \mathcal{R}^n$ が定数ベクトル，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ が変数ベクトルである．この問題に対して，次の仮定を置く．

仮定 4.2 正方行列 $\boldsymbol{Q}$ が対称である．

仮定 4.3 正方行列 $\boldsymbol{Q}$ が半正定値である，すなわち，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ に対して $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \geq 0$ が成立する．

任意の n 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，対称行列 $\boldsymbol{Q}$ が存在し

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x}$$

となるので (演習問題)，仮定 4.2 は一般に成立するとしてもよい．仮定 4.3 より，目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ が凸関数となる (演習問題) ので，問題 (1) を制約のない凸 2 次計画問題と呼ぶ.

$\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{R}^n$ が制約のない凸 2 次計画問題 (1) の最適解である必要十分条件は，関数 f の勾配がゼロとなる条件

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

が成り立つことである.

4.3 線形等式制約のみを持つ凸 2 次計画問題

線形の等式制約のみを持つ 2 次計画問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{array} \tag{3}$$

と表される．ここで，m と n を自然数するとき，$\boldsymbol{Q} \in \mathcal{R}^{n\times n}$ と $\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}^{m\times n}$ が定数行列，$\boldsymbol{b} \in \mathcal{R}^m$ と $\boldsymbol{c} \in \mathcal{R}^n$ が定数ベクトル，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ が変数ベクトルである．前節と同じように，仮定 4.2 と 4.3 が成り立つとする．このとき，問題 (3) を線形等式制約のみを持つ凸 2 次計画問題と呼ぶ.

定理 4.4 $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{R}^n$ が凸 2 次計画問題 (3) の最適解である必要十分条件は，ある $\boldsymbol{y}^* \in \mathcal{R}^m$ が存在し

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y}^* & = & \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* & = & \boldsymbol{b} \end{array} \tag{4}$$

が成り立つことである.

上の定理の条件 (4) にある第 1 式 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y}^*$ は，目的関数の勾配が実行可能領域を表す面に直交していると解釈することができる.

例 4.5 次の線形等式制約のみを持つ凸 2 次計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & (x_1 - 4)^2 + x_1 x_2 + 2(x_2 - 3)^2 \\ \text{制約条件} & 2x_1 + x_2 = 2 \end{array} \tag{5}$$

の最適解は，(4) より

$$\begin{array}{l} 2y = 2x_1 + x_2 - 8 \\ y = x_1 + 4x_2 - 12 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{array}$$

を満たす．この連立一次方程式を解くことにより，問題 (5) の最適解 $x_1 = -\frac{1}{7}$，$x_2 = \frac{16}{7}$ と，そのときの $y = -3$ ならびに最適値 $\frac{125}{7}$ が得られる．

4.4 凸 2 次計画問題の最適条件

凸 2 次計画問題は，一般に

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1 \\ & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_2 \end{array} \tag{6}$$

と表すことができる．ここで, m_1, m_2, n を自然数とするとき, $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A}_1 \in \mathcal{R}^{m_1\times n}$, $\boldsymbol{A}_2 \in \mathcal{R}^{m_2\times n}$ が定数行列，$\boldsymbol{b}_1 \in \mathcal{R}^{m_1}$，$\boldsymbol{b}_2 \in \mathcal{R}^{m_2}$，$\boldsymbol{c} \in \mathcal{R}^n$ が定数ベクトル，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ が変数ベクトルである．正方行列 $\boldsymbol{Q}$ が対称かつ半正定値であるとする．また，変数の一部に非負制約がある場合には，不等式 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_2$ の一部によって表されていると考えることにより，任意の 2 次計画問題がこの形 (6) に表現できる．

$\boldsymbol{x}^*$ が 2 次計画問題 (6) の最適解であるとする．このとき，2 次の目的関数を点 $\boldsymbol{x}^*$ で一次近似した次の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c})^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1 \\ & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_2 \end{array}$$

あるいは，そこから目的関数の定数項を除いた問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c})^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1 \\ & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_2 \end{array} \tag{7}$$

を考える．

定理 4.6 $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{R}^n$ が凸 2 次計画問題 (6) の最適解であるならば，$\boldsymbol{x}^*$ は線形計画問題 (7) の最適解である．

定理 4.7 $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{R}^n$ が凸 2 次計画問題 (6) の最適解となる必要十分条件は, ある $\boldsymbol{y}_1 \in \mathcal{R}^{m_1}$ と $\boldsymbol{y}_2 \in \mathcal{R}^{m_2}$ が存在し，条件

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}^* \geq \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y}_2^T(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}_2) = 0 \\ \boldsymbol{y}_2 \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{8}$$

が成立することである．

系 4.8 n 個の変数と m 個の等式制約を持つ標準形の凸 2 次計画問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0} \end{array}$$

と表される．$\boldsymbol{x}\in\mathcal{R}^n$ がこの凸 2 次計画問題の最適解となる必要十分条件は，ある $\boldsymbol{y}\in\mathcal{R}^m$ と $\boldsymbol{z}\in\mathcal{R}^n$ が存在し，条件

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z}=0 \\ \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0},\boldsymbol{z}\geq\boldsymbol{0} \end{array} \tag{9}$$

が成立することである．

例 4.9 次の 2 次計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & 2x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3x_1-4x_2 \\ \text{制約条件} & x_1+2x_2=1 \\ & x_1\geq 0,x_2\geq 0 \end{array} \tag{10}$$

は,

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \frac{1}{2}(x_1,x_2)\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+(-3,-4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \text{制約条件} & x_1+2x_2=1 \\ & x_1\geq 0,x_2\geq 0 \end{array}$$

と変形できる．したがって，(x_1^*,x_2^*) が最適解ならば，系 4.8 より，ある y^*，z_1^*，z_2^* に対して

$$\begin{array}{l} x_1^*+2x_2^*=1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}y^*+\begin{pmatrix} z_1^* \\ z_2^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ x_1^*z_1^*+x_2^*z_2^*=0 \\ x_1^*\geq 0,x_2^*\geq 0 \\ z_1^*\geq 0,z_2^*\geq 0 \end{array}$$

となる．相補性条件 $x_1^*z_1^*+x_2^*z_2^*=0$ あるいは $x_1^*z_1^*=0$，$x_2^*z_2^*=0$ から，次の 4 つの場合に分けて考えることができる．

$x_1^*=0$，$x_2^*=0$ のとき: $x_1^*+2x_2^*=1$ を満たさないので，解なし．

$x_1^*=0$，$z_2^*=0$ のとき: 等式条件より，$x_2^*=\frac{1}{2}$，$y^*=-\frac{3}{2}$，$z_1^*=-1$ となるが，これは不等式を満たさない．

$z_1^* = 0$**，**$x_2^* = 0$ **のとき**: 等式条件より，$x_1^* = 1$，$y^* = 1$，$z_2^* = -5$ となるが，これは不等式を満たさない.

$z_1^* = 0$**，**$z_2^* = 0$ **のとき**: 等式条件より，$x_1^* = \frac{2}{7}$，$x_2^* = \frac{5}{14}$，$y^* = -\frac{3}{2}$ となり，これはすべての条件を満たす.

したがって，主問題 (10) の最適解は，$x_1^* = \frac{2}{7}$，$x_2^* = \frac{5}{14}$ であり，そのとき $y^* = -\frac{3}{2}$，$z_1^* = 0$，$z_2^* = 0$ である.

4.5 凸 2 次計画問題の双対問題と双対定理

凸 2 次計画問題 (6) を再掲すると

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1 \\ & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_2 \end{array}$$

である．次の問題

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{y}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y}_2 \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{11}$$

を上の凸 2 次計画問題の双対問題という．このとき，元の問題を主問題という．最小化問題とするために (11) の目的関数に -1 を乗ずると凸関数となるので，(11) は，凸 2 次計画問題である．これより，標準形の凸 2 次計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{12}$$

の双対問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{13}$$

となる (演習問題).

例 4.10 例 4.9 で扱った 2 次計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 4x_2 \\ \text{制約条件} & x_1 + 2x_2 = 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

の双対問題は,

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & y - \frac{1}{2}(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
\text{制約条件} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \\
& z_1 \geq 0, z_2 \geq 0
\end{array}
$$

あるいは

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & y - (2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \\
\text{制約条件} & y + z_1 = 4x_1 + x_2 - 3 \\
& 2y + z_2 = x_1 + 2x_2 - 4 \\
& z_1 \geq 0, z_2 \geq 0
\end{array}
$$

となる．例 4.9 の結果より，主問題の最適解は $x_1^* = \frac{2}{7}$，$x_2^* = \frac{5}{14}$ であり，双対問題の最適解は $y^* = -\frac{3}{2}$，$z_1^* = 0$，$z_2^* = 0$ となる．このとき，それぞれの最適値が一致し，$-\frac{53}{28}$ となる．

定理 4.11 (弱双対定理) 凸 2 次計画問題 (6)の任意の実行可能解$\boldsymbol{x}$とその双対問題 (11) の任意の実行可能解 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)$ に対して

$$
\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{y}_2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}')^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}'
$$

が成立する．

LP の場合と同様に，弱双対定理からいくつかの性質が得られる．たとえば，凸 2 次計画問題 (6) の実行可能解と双対問題の実行可能解で目的関数値が等しければ，それぞれの問題の最適解である．

定理 4.12 (双対定理) $\boldsymbol{x}^*$ が凸 2 次計画問題 (6) の最適解ならば，ある $\boldsymbol{y}_1 \in \mathcal{R}^{m_1}$ と $\boldsymbol{y}_2 \in \mathcal{R}^{m_2}$ が存在し，$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)$ が双対問題 (11) の最適解となり，さらに双対問題 (11) の最適値と問題 (6) の最適値が等しい．

参考文献

[1] 水野眞治：学習用テキスト線形計画法 (9) 2 次計画問題，Web 上のテキスト，http://www.me.titech.ac.jp/˜mizu_lab/text/ (2010)