数値的最適化特論（1）

2010 年 4 月 水野 眞治 （東京工業大学）

- 今年度の方針：小島、土谷、水野、矢部著 「内点法」朝倉書店 （２００１）を参考書として主に講義を行う。講義中に小テストを実施する.
- 成績：小テスト、レポート、出席による総合評価を予定している。

1 数理計画法概論 – 内点法を中心として –

- 内点法は、Karmarkar によって 1984 年に提案された。

1.1 線形計画問題、単体法、楕円体法、双対定理について簡単に

1.1.1 線形計画問題

- 線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{目的：} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \text{最小化}, \\ \text{条件：} & x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in P \end{array}$$

目的関数、実行可能解、実行可能集合（実行可能多面体）

$$P = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) | \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (1 \le i \le m)\}$$

- 図を用いた説明（等高面、最小解、頂点）

1.1.2 単体法

- 単体法は、1947 年に Dantzig によって提案された。1 つの頂点から出発して隣接する頂点をたどって、目的関数を小さくしながら、最適解に到達する。単体法によって生成される頂点の数は、n と m の多項式で押さえることが出来ていない。

1.1.3 計算複雑度の理論の発展と楕円体法

- 単体法から楕円体法へ（計算複雑度、多項式アルゴリズム）

1.1.4 双対定理

- 1.1.1 節で定義した線形計画問題の双対問題は、次のようになる。

$$\begin{array}{ll} \text{目的：} & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \text{最大化}, \\ \text{条件：} & y = (y_1, y_2, \cdots, y_m) \in D \end{array}$$

ここで、実行可能集合 D は、次のようになる。

$$D = \{y = (y_1, y_2, \cdots, y_m) | \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \ (1 \le j \le n), \ y \le 0\}$$

- **問題:** 双対問題の双対問題が主問題と一致することを示せ。
- 弱双対定理と双対ギャップ

1.2 線形計画問題に対する内点法

- 内点法は、実行可能集合の内部を通って最適解に近づく。Karmarkar 法、アフィンスケーリング法、解析的中心法、主双対内点法などがある。

1.2.1 Karmarkar 法

- Karmarkar 法の特徴は、（１）多項式オーダーの解法であり、（２）実行可能集合の内部を通って最適解に近づき、（３）実用的に高速な解法であることである。

1.2.2 アフィンスケーリング法

- Karmarkar 法の変形版として提案されたが、実は 1967 年に Dikin によって提案されていた。

1.2.3 Renegar による解析的中心追跡法

- 解析的中心、対数障壁関数、中心パス
- ポテンシャル減少法とパス追跡法

1.2.4 主双対内点法

- 主双対内点法は、1987 年に小島-水野-吉瀬と田辺によって提案された。
- 主双対問題

  目的： $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to$ 最小化,

  条件： $x \in P, \ y \in D$

- 主双対予測子・修正子法、主双対ポテンシャル減少法、非許容初期点内点法、Mehorotra の予測子・修正子法などがある。

1.3 数理計画問題とは

- 数理計画問題 (数理計画法)：

$$\begin{array}{ll} \text{目的：} & f(x) \to \text{最小化}, \\ \text{条件：} & x \in F \end{array}$$

  実行可能集合 (許容集合)、目的関数

- 問題が実行可能、実行可能解 (許容解)、大域的最小解（最小解) と局所最小解、大域的最小値 (最小値)、問題（最適値）の有界と非有界
- 最小、最大、最適
- 数理計画問題の 4 つの場合
- 最適化問題と計算複雑度についての注

1.4 連続最適化と離散最適化

- 連続最適化問題の実行可能集合と目的関数
- 連続最適化問題に属する数理計画問題
- 離散最適化問題の特徴（実行可能集合）
- 離散最適化問題に属する数理計画問題
- 等式条件と不等式条件について
- 凸計画問題、線形計画問題の特徴

1.5 局所最適化と大域的最適化

- 局所最小解（極小解）
- 離散最適化問題の局所最小解
- 凸計画問題における局所最小解と大域的最小解
- 緩和問題（大域的最小値の下限をもとめる）とその特徴

1.6 凸計画問題と内点法

- 凸集合と凸関数、凸計画問題
- 凸 2 次計画問題
- 半正定値計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{目的：} & A_0 \cdot X \to \text{最小化}, \\ \text{条件：} & A_i \cdot X = b_i \ (1 \le i \le m), \ X \in S_+^n \end{array}$$

- 内点法の非線形計画問題への拡張（自己整合障壁理論と対数障壁関数）
- **問題:** 次の 2 変数関数 f が凸関数となることを示せ。

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$