数値的最適化特論 2010 年 講義資料 (5)

インフィージブル内点法

水野 眞治

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/

2010 年 7 月 5 日

概要

線形計画問題を解く内点法は，初期点として実行可能な内点が得られるときには，実行可能な内点列を生成するが，そのような内点が得られないときには，実行不能な内点を初期点として，実行可能とは限らない内点列を生成する場合もある．その場合の内点法をインフィージブル内点法という．ここでは，線形計画問題の主問題と双対問題を同時に解くインフィージブル内点法のアルゴリズムを解説する．

1 インフィージブル内点法

実行可能とは限らない初期点を使うことのできる内点法をインフィージブル内点法と呼ぶ．初期点が実行不能な場合には，多くの場合アルゴリズムの途中で生成される点も実行不能である．インフィージブル内点法は，実際に計算効率がよいと言われ，最適化問題を解くほとんどのソフトウェアパッケージに採用されている．アルゴリズムとして，とても単純であり，その手順を理解する，あるいはプログラムを作成するといったことが簡単にできるという長所も持ち合わせている．インフィージブル内点法は，主に主問題と双対問題を同時に解くアルゴリズムとして提案され，研究されてきた．したがって，ここでは線形計画問題の主双対問題を解くインフィージブル内点法を解説する．

インフィージブル内点法は，アルゴリズムとして単純である反面，理論的解析が実行可能内点を初期点とする場合に比べ難しい．主双対問題の実行可能な初期点を使う内点法では，解くべき問題が実行可能であり，最適解を持つことが問題を解く前から理論的に判明している．しかし，インフィージブル内点法で解く問題の実行可能性などは不明である．したがって，与えられた問題をインフィージブル内点法で解くためには，実行可能性または解の存在性を判定し，さらに解が存在する場合には一つの近似解を求めることが必要となる．

1.1 パス追跡法

m と n を正の整数とし，$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$，m 次元ベクトル $\boldsymbol{b}$，n 次元ベクトル $\boldsymbol{c}$ に対して，標準形の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{1}$$

とその双対問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c} \\
& \boldsymbol{z}\geq\boldsymbol{0}
\end{array}
\tag{2}
$$

を扱う．このとき主双対問題は，条件

$$
\begin{array}{l}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c} \\
\boldsymbol{X}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0},\boldsymbol{z}\geq\boldsymbol{0}
\end{array}
\tag{3}
$$

を満たす変数ベクトル $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ を求める問題である．ここで，$\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{x})$ は，ベクトル $\boldsymbol{e}=(1,1,\cdots,1)^T$ に対して，$\boldsymbol{X}\boldsymbol{e}=\boldsymbol{x}$ を満たす対角行列である．この主双対問題の任意の解を $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{z}^*)$ とすれば，$\boldsymbol{x}^*$ は線形計画問題 (1) の解であり，$(\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{z}^*)$ はその双対問題 (2) の解である．主双対問題の解析的中心は，パラメータを $\mu>0$ とするとき，方程式系

$$
\begin{array}{l}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c} \\
\boldsymbol{X}\boldsymbol{z}=\mu\boldsymbol{e} \\
\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0},\boldsymbol{z}\geq\boldsymbol{0}
\end{array}
\tag{4}
$$

の解である．主双対問題 (3) に実行可能内点が存在すれば，任意の $\mu>0$ に対して解析的中心が存在する．それを $(\boldsymbol{x}(\mu),\boldsymbol{y}(\mu),\boldsymbol{z}(\mu))$ とすれば，解析的中心の集合

$$
P_1=\{(\boldsymbol{x}(\mu),\boldsymbol{y}(\mu),\boldsymbol{z}(\mu)):\mu>0\}
\tag{5}
$$

は，なめらかなパスとなる．$\mu\to 0$ のとき，パス上の点 $(\boldsymbol{x}(\mu),\boldsymbol{y}(\mu),\boldsymbol{z}(\mu))$ は，最適解集合上の一点 $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{z}^*)$ に収束し，この $\boldsymbol{x}^*$ は問題 (1) の解である．したがって，十分小さな $\mu>0$ に対して，解析的中心の近似点を求めることにより，線形計画問題 (1) を解くことができる．

条件 $\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{z}>\boldsymbol{0}$ を満たすとき，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ を内点という．初期内点を $(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0,\boldsymbol{z}^0)$ とする．インフィージブル内点法の最大の特徴は，この初期点として任意の (実行不能な) 内点を選ぶことができることである．第 k 反復目の内点 $(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{z}^k)$ が得られていると仮定し，次の内点 $(\boldsymbol{x}^{k+1},\boldsymbol{y}^{k+1},\boldsymbol{z}^{k+1})$ の求め方を示す．パラメータ $\mu>0$ の値を定め，現在の点 $(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{z}^k)$ において，解析的中心を定義する方程式系 (4) にニュートン法を適用したときに計算されるニュートン方向を $(\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y},\Delta\boldsymbol{z})$ とする．一般に，方程式系 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}$ に対する点 $\bar{\boldsymbol{u}}$ でのニュートン方向 $\Delta\boldsymbol{u}$ は，線形方程式系 $\nabla\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{u}})\Delta\boldsymbol{u}=-f(\bar{\boldsymbol{u}})$ の解である．したがって，方向 $(\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y},\Delta\boldsymbol{z})$ は線形方程式系

$$
\begin{array}{l}
\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}=-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{b}) \\
\boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y}+\Delta\boldsymbol{z}=-(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^k+\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{c}) \\
\boldsymbol{Z}_k\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{X}_k\Delta\boldsymbol{z}=\mu\boldsymbol{e}-\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k
\end{array}
\tag{6}
$$

の解である．この方程式系を解くことにより，ニュートン方向 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ は，順に

$$\begin{array}{rcl} \Delta\boldsymbol{y} & = & -(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}_k^{-1}\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{A}^T)^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}_k^{-1}(\mu\boldsymbol{e} - \boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k) \\ & & +(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}_k^{-1}\boldsymbol{X}_k(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^k + \boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{c})) \\ \Delta\boldsymbol{z} & = & -\boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^k + \boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{c}) \\ \Delta\boldsymbol{x} & = & -\boldsymbol{Z}_k^{-1}\boldsymbol{X}_k\Delta\boldsymbol{z} + \mu\boldsymbol{Z}_k^{-1}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x}^k \end{array} \tag{7}$$

と計算できる．現在の点からその方向に，主問題と双対問題の変数に関して別々のステップサイズ進み，次の点

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{k+1} \\ \boldsymbol{y}^{k+1} \\ \boldsymbol{z}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^k + \alpha_P\Delta\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}^k + \alpha_D\Delta\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z}^k + \alpha_D\Delta\boldsymbol{z} \end{pmatrix} \tag{8}$$

を求める．以上の議論をまとめれば，次のようになる．

アルゴリズム 1.1 実行不能な初期内点を使う主双対パス追跡法は，次のステップから成る．

ステップ 0　初期内点を $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ とし，$k = 0$ とする．

ステップ 1　内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ において，パラメータ μ の値を定めて，方程式系 (6) の解 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ を式 (7) により計算する．

ステップ 2　ステップサイズ $\alpha_P > 0$ と $\alpha_D > 0$ を定めて，次の点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ を (8) により求める．k を 1 増加して，ステップ 1 へ行く．

ここで，反復ごとのパラメータ μ とステップサイズ α_P と α_D の決め方を変えることにより，様々なアルゴリズムを作ることができる．

1.2　Lustig et al. のアルゴリズム

Lustig et al. [2] が提案したインフィージブル内点法では，簡単な方法によりパラメータ μ の値とステップサイズ α_P と α_D を決めている．まず，二つの定数 $\gamma \in (0,1)$ と $\lambda \in (0,1)$ を用意する．Lustig et al. [2] は，$\gamma = 1/n$ あるいは $\gamma = 1/\sqrt{n}$ とし，λ として 1 に近い値 (0.99 など) を使っている．第 k 反復目の点を $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ とするとき，パラメータ値を

$$\mu = \gamma\frac{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{n}$$

とする．この μ に対して，探索方向 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ を式 (7) により計算する．次の点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ も内点であるためには，ステップサイズをそれぞれ

$$\begin{array}{l} \hat{\alpha}_P = \max\{\alpha : \boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x} \geq 0\} \\ \hat{\alpha}_D = \max\{\alpha : \boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z} \geq 0\} \end{array}$$

より小さくする必要がある．そこで，定数 $\lambda \in (0,1)$ を使い，

$$\alpha_P = \lambda\hat{\alpha}_P,\ \alpha_D = \lambda\hat{\alpha}_D$$

とすることにより，内点が得られる．λ の値が大きいほど長いステップを進むことができるが，1 に近いと領域 $\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) : \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}\}$ の境界に近づくので次回以降のステップサイズが短くなる可能性がある．$\Delta\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ または $\Delta\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}$ のときには，$\hat{\alpha}_P$ または $\hat{\alpha}_D$ が無限大となる．このような場合にもアルゴリズムが実行できるように，α_P と α_D の上界を設定する必要がある．また，主問題の探索方向 $\Delta\boldsymbol{x}$ が目的関数の増加方向である場合には，ステップサイズ α_P をおまり大きく (1 以上に) しないほうがよい．双対問題の探索方向 $(\Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ が目的関数の減少方向である場合にも，同様である．

注意 1.2 主双対内点法では，ほとんどのアルゴリズムの各反復で双対ギャップが減少するが，主問題の目的関数が増加する，あるいは双対問題の目的関数が減少することがある．

1.3 近傍を使ったパス追跡法

パス追跡法は，近傍を使うことにより，最適解に大域的に収束する，あるいは多項式オーダの反復回数で解を求めることが可能となる．ここでは，そのようなアルゴリズムを説明する．ただし，その理論的な収束性などについては説明しない．大域的な収束性については Kojima, Megiddo, and Mizuno [1] を，多項式オーダの反復による収束については，Zhang [5] あるいは Mizuno [3] を参照していただきたい．

主双対問題 (3) について，式 (5) で定義された中心パス P_1 と初期内点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ を内部に含む近傍を N とする．たとえば，$\mu_0 = (\boldsymbol{x}^0)^T \boldsymbol{z}^0/n$ と実数 $\beta \in (0,1)$ に対して，初期点が

$$\boldsymbol{X}_0 \boldsymbol{z}^0 > (1-\beta)\mu^0 \boldsymbol{e}$$

を満たすとき，定数 $\eta \in (0,1]$ に対して

$$N_1(\beta,\eta) = \left\{ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mu\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b}\| \geq \eta\mu_0\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|, \\ \mu\|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{c}\| \geq \eta\mu_0\|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} - \boldsymbol{c}\|, \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{z} \geq (1-\beta)\mu\boldsymbol{e},\ \mu = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z}/n, \boldsymbol{x} > 0, \boldsymbol{z} > 0 \end{array} \right\}$$

は，中心パスと初期点を含む近傍となる (演習問題).

近傍 $N_1(\beta,\eta)$ 上の任意の点列を $\{(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)\}$ とする．$k \to \infty$ のとき，$(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k \to 0$ ならば，$\mu^k = (\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k/n \to 0$ となるので，近傍の定義より $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}\| \to 0$ かつ $\|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^k + \boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{c}\| \to 0$ となる．したがって，その点列がある $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ に収束するならば，それは主双対問題の最適解となる．このことから，近傍 $N_1(\beta,\eta)$ 上で双対ギャップ $(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k$ が減少するように点列を生成すればよい．

初期点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ から近傍 N 上に点列を生成し，k 番目の点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ が得られているとし，次の点の求め方を解説する．$\mu^k = (\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k/n$ とし，$\gamma \in (0,1)$ に対して，

$$\mu = \gamma\mu^k$$

とする．このとき，点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ において，解析的中心の式 (4) にニュートン法を適用し，探索

方向 $(\Delta \boldsymbol{x}, \Delta \boldsymbol{y}, \Delta \boldsymbol{z})$ を式 (7) により計算する．ステップサイズを

$$\alpha = \max\{\hat{\alpha} | (\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) + \alpha'(\Delta \boldsymbol{x}, \Delta \boldsymbol{y}, \Delta \boldsymbol{z}) \in N \text{ for any } \alpha' \in [0, \hat{\alpha}]\} \tag{9}$$

とし，次の点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ を $\alpha_P = \alpha_D = \alpha$ として式 (8) により計算する．この近傍を使ったパス追跡法のアルゴリズムは次のようになる．

アルゴリズム 1.3 近傍を使う主双対パス追跡インフィージブル内点法は，次のステップから成る．

ステップ 0 近傍 N 上の初期内点を $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ とする．$\gamma \in (0, 1)$ とし，$k = 0$ とする．

ステップ 1 内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ において，パラメータ $\mu = \gamma (\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{z}^k / n$ とし，方程式系 (6) の解 $(\Delta \boldsymbol{x}, \Delta \boldsymbol{y}, \Delta \boldsymbol{z})$ を式 (7) により計算する．

ステップ 2 ステップサイズ $\alpha > 0$ を式 (9) により定めて，$\alpha_P = \alpha_D = \alpha$ として次の点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ を (8) により求める．k を 1 増加して，ステップ 1 へ行く．

1.4 インフィージブル中心パス

前節までに解説したアルゴリズムは，(5) で定義された中心パス P_1 を追跡する．インフィージブル内点法では，P_1 と異なるパス P_2 を使う場合もある．パス P_1 は，実行可能領域の内点から成るので，主双対問題に実行可能内点が存在しない場合には，存在しない．また，初期点はこのパスから大きく離れていることもありうる．一方，パス P_2 は，初期点の近くを通り，主双対問題に解が存在する場合には最適解に近づき，解が存在しない場合には非有界である．

線形計画問題 (1)，$\boldsymbol{x}^0 > \boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{z}^0 > \boldsymbol{0}$ を満たす初期内点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$，パラメータ $\theta \in [0, 1]$ に対して，人工的な線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & (\boldsymbol{c} + \theta(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{c}))^T \boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \theta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b}) \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

とその双対問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & (\boldsymbol{b} + \theta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b}))^T \boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} + \theta(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{c}) \\ & \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

および主双対問題

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \theta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b}), \\ \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} + \theta(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{c}), \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{10}$$

を考える．この問題は，$\theta = 0$ のときに元の主双対問題 (3) と一致し，$\theta = 1$ のとき実行可能内点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ をもつ．θ を固定するとき，問題 (10) に実行可能な内点が存在すれば，$\mu > 0$ に対し

て，問題

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \theta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b}), \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} + \theta(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{c}), \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{z} = \mu\boldsymbol{e}, \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{11}$$

の解が存在し，それは主双対問題 (10) の解析的中心である．初期点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ に対して，$\mu^0 = (\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{z}^0/n$ とするとき，その初期点が $\theta = 1$，$\mu = \mu^0$ のときの解析的中心の近似解となっているとする．$\mu = \theta\mu^0$ として，θ を動かしたときの解析的中心の集合

$$\begin{aligned} P_2 = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) | & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \theta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b}), \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} + \theta(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{c}), \\ & \boldsymbol{X}\boldsymbol{z} = \theta\mu_0\boldsymbol{e}, \theta > 0, \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} > \boldsymbol{0}\} \end{aligned}$$

を定義すれば，それはパスとなり，$\theta = 1$ のときに初期点と近く，$\theta \to 0$ のときに元の主双対問題の最適解（もし存在するならば）に近づく．したがって，初期点からこのパスを近似する点列を生成し，$\theta \to 0$ とすることにより，主双対問題を解くことができると考えられる．また，元の主双対問題が実行不能な場合には，主双対問題 (10) が実行可能となるような θ に正の下限 $\theta_l > 0$ が存在する．そして，$\theta \to \theta_l$ のとき，P_2 上の点が発散する．したがって，パス P_2 を追跡する点列を生成したときに，θ が 0 に近づく前に点列が発散するようであれば，主双対問題が実行不能であるといえる．

1.5 MTY プレディクタ・コレクタ法

ここでは，前節で定義したパス P_2 を追跡することにより，主双対問題を解くための Mizuno, Todd, and Ye [4] によるプレディクタ・コレクタ法を説明する．

初期内点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ と定数 $\beta \in (0, 1)$ が与えられたときに，パス P_2 の近傍

$$N_2(\beta) = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \theta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b}), \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} + \theta(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{c}), \\ \|\boldsymbol{X}\boldsymbol{z} - \theta\mu_0\boldsymbol{e}\| \leq \beta\theta\mu_0, \theta > 0, \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} > \boldsymbol{0} \end{array} \right\}$$

を定義する．この近傍 N_2 内の点列についても，パス P_2 上の点列と同じような性質が成り立つ．初期点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ は，$\|\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{z}^0 - \mu_0\boldsymbol{e}\| \leq \beta\mu_0$ を満たすならば，この近傍 $N_2(\beta)$ 上にある．

プレディクタ・コレクタ法は，θ の値を減少させるプレディクタステップとパス P_2 の近くに戻るコレクタステップを交互に行うアルゴリズムである．二つの定数 $\beta_1 = 0.25$ と $\beta_2 = 0.5$ を決める．プレディクタ・コレクタ法で生成される点列 $\{(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)\}$ は，小さな近傍 $N_2(\beta_1)$ に含まれる．しかし，プレディクタステップ後に計算される中間点は，少し大きな近傍 $N_2(\beta_2)$ 上の点である．

第 k 反復目の内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \in N_2(\beta_1)$ とパラメータ $\theta_k \in (0, 1)$ が得られているとして，次の点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ とパラメータ $\theta_{k+1} \in (0, 1)$ の求め方を解説する．ここで，点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ は $\theta = \theta_k$ のときの主双対問題 (10) の実行可能解とする．まずプレディクタステップにおいて，点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ で元の主双対問題 (3) にニュートン法を適用し，方向 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ を求める．

この方向は，方程式系 (6) において $\mu = 0$ のときに計算される方向である．ステップサイズ α をもちいて中間点を

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^k \\ \boldsymbol{y}^k \\ \boldsymbol{z}^k \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{x} \\ \Delta\boldsymbol{y} \\ \Delta\boldsymbol{z} \end{pmatrix} \tag{12}$$

とする．中心パスの近傍 $N_2(\beta_2)$ の外に出ない範囲で最も大きなステップサイズ

$$\hat{\alpha} = \max\left\{ \bar{\alpha} \,\middle|\, \begin{array}{l} \|(\boldsymbol{X}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{X})(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z}) - (1-\alpha)\theta_k\mu_0\boldsymbol{e}\| \\ \quad \leq \beta_2(1-\alpha)\theta_k\mu_0 \text{ for any } \alpha \in [0, \bar{\alpha}] \end{array} \right\} \tag{13}$$

を求める．$\theta' = (1-\hat{\alpha})\theta_k$, $\alpha = \hat{\alpha}$ として，式 (12) により，$(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ を求める．この点 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ は $\theta = \theta'$ のときの主双対問題 (10) の実行可能解となっている (演習問題).

次にコレクターステップにおいて，点 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ で $\theta = \theta'$ のときの中心を定義する方程式系 (11) に対するニュートン方向 $(\Delta\boldsymbol{x}', \Delta\boldsymbol{y}', \Delta\boldsymbol{z}')$ を求める．この方向は，方程式系

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y}' + \Delta\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{Z}'\Delta\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{X}'\Delta\boldsymbol{z}' = -\hat{\boldsymbol{X}}'\hat{\boldsymbol{z}}' + \theta'\mu_0\boldsymbol{e} \end{array} \tag{14}$$

の解であり，順に

$$\begin{array}{l} \Delta\boldsymbol{y}' = (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z}')^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}^T)^{-1}(\boldsymbol{b} - \theta'\mu_0\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z}')^{-1}\boldsymbol{e}) \\ \Delta\boldsymbol{z}' = -\boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y}' \\ \Delta\boldsymbol{x}' = -(\boldsymbol{Z}')^{-1}\boldsymbol{X}'\Delta\boldsymbol{z}' + (\theta'\mu_0(\boldsymbol{Z}')^{-1}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x}') \end{array} \tag{15}$$

と計算できる．ステップサイズを 1 に固定して，次の点

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{k+1} \\ \boldsymbol{y}^{k+1} \\ \boldsymbol{z}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{z}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{x}' \\ \Delta\boldsymbol{y}' \\ \Delta\boldsymbol{z}' \end{pmatrix} \tag{16}$$

を求める．このとき, 点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ は $\theta_{k+1} = \theta'$ のときの主双対問題 (10) の実行可能解となっている．さらに, Mizuno et al. [4] に示されている結果を使えば, $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1}) \in N_2(\beta_1)$ も成立する．以上の議論から，プレディクタ・コレクタ法は次のように表すことができる．

アルゴリズム 1.4 MTY プレディクタ・コレクタ法は，次のステップから成る．

ステップ 0　$\beta_1 = 0.25$, $\beta_2 = 0.5$, $k = 0$ とする．初期実行可能内点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0) \in N_2(\beta_1)$ を選び，$\theta_0 = 1$, $\mu_0 = (\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{z}^0/n$ とする．

ステップ 1　$\mu = 0$ に対して，方程式系 (6) の解 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ を計算する．近傍 $N_2(\beta_2)$ から出ないステップサイズの上限 $\hat{\alpha}$ を (13) により求め，中間点 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ を (12) により求める．$\theta' = (1-\hat{\alpha})\theta_k$ とする．

ステップ 2　$(\Delta\boldsymbol{x}', \Delta\boldsymbol{y}', \Delta\boldsymbol{z}')$ を (15) により計算し，$(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ を (16) により求める．$\theta_{k+1} = \theta'$ とする．k を 1 増加して，ステップ 1 へ行く．

参考文献

[1] Kojima, M., Megiddo,, N. and Mizuno, S.: "A Primal-Dual Infeasible-Interior Point Algorithm for Linear Programming", *Mathematical Programming* **61** (1993) 261–280.

[2] Lustig, I. J., Marsten, R. E., and Shanno, D. F.: "Computation Experience with a Primal-Dual Interior Point Method for Linear Programming", *Linear Algebra and its Applications* **152** (1991) 191–222.

[3] Mizuno, S.: "Polynomiality of Infeasible-Interior-Point Algorithms for Linear Programming", *Mathematical Programming* **67** (1994) 109–119.

[4] Mizuno, S., Todd, M. J., and Ye, Y.: "On Adaptive-Step Primal-Dual Interior-Point Algorithms for Linear Programming", *Mathematics of Operations research* **18** (1993) 964–981.

[5] Zhang, Y.: "On the Convergence of a Class of Infeasible Interior-Point Methods for the Horizontal Linear Complementarity Problem", *SIAM Journal on Optimization* **4** (1994) 208-227.