学習・研究用テキスト 内点法 (3A)

主双対パス追跡法

水野 眞治

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/

2010 年 11 月 9 日

概要

線形計画問題の主問題と双対問題を同時に解く主双対内点法の中で，中心パスを追跡するアルゴリズムについて解説する．パス追跡法には，中心パスの近傍として狭い近傍を使う場合と広い近傍を使う場合がある．問題を解くのに必要とされる反復回数が，広い近傍を使う場合に $O(nL)$ となることを示し，狭い近傍を使うことにより $O(\sqrt{n}L)$ となることを示す．また．プレディクタ・コレクタ法の反復回数が $O(\sqrt{n}L)$ となることを示す．

目次

1 **主双対パス追跡法** 1

1.1 主双対問題 2

1.2 パス追跡法 3

1.3 中心パスの広い近傍を使ったパス追跡法 5

1.4 中心パスの狭い近傍を使ったパス追跡法 9

1.5 プレディクタ・コレクタ法 12

1 主双対パス追跡法

線形計画問題の主問題と双対問題を合わせた主双対問題を述べ，この節を通じて使われる問題に対する仮定を述べる．その後に，アルゴリズムを解説する．

1.1 主双対問題

n 個の非負変数と m 個の等式制約をもつ標準形の線形計画問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{1}$$

と表される．これを主問題とするとき，双対問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{2}$$

となる．$\boldsymbol{x}$ が主問題の最適解であり，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が双対問題の最適解であるならば

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{3}$$

を満たす．ここで，$\boldsymbol{X} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{x})$ である．逆に，ベクトル $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が上記 (3) の条件をすべて満たすならば, $\boldsymbol{x}$ は主問題の最適解であり，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ は双対問題の最適解である．ゆえに，(3) を満たす解を求めることにより，線形計画問題の主問題と双対問題を同時に解くことができる．この条件 (3) を満たす $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を求める問題を**主双対問題**と呼び，この条件をすべて満たす $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を**最適解**と呼ぶ．集合

$$F_{PD} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}\}$$

の要素を主双対問題の**実行可能解**といい，集合

$$F_{PD}^0 = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} > \boldsymbol{0}\}$$

の要素を主双対問題の**実行可能内点**という．ここで，次の仮定を置く．

仮定 1.1 $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが m である．

仮定 1.2 主双対問題に実行可能内点が存在し，一つの内点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0) \in F_{PD}^0$ が既知である．

これらの仮定が成り立つとき，主双対問題 (3) は最適解をもち，最適解の集合が有界となる．

1.2 パス追跡法

この節では，Kojima, Mizuno, and Yoshise [1] によって提案された主双対パス追跡法の概略を示し，理論的な性質については次節以降で解説する．仮定 1.2 のもとで，定数 $\mu > 0$ に対して，双対ギャップが一定の集合

$$\hat{F}_{PD}(n\mu) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) | \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} = n\mu, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}\}$$

は，空でない有界な多面体となり，解析的中心 $(\boldsymbol{x}(\mu), \boldsymbol{y}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu))$ をもつ．その解析的中心は

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{z} = \mu \boldsymbol{e} \end{array} \tag{4}$$

と $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{z} > \boldsymbol{0}$ を満たす解である．解析的中心の集合

$$P = \{(\boldsymbol{x}(\mu), \boldsymbol{y}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu)) | \mu > 0\}$$

は，中心パスとなる．主双対問題が最適解をもつとき，$\mu \to 0$ とすれば，解析的中心 $(\boldsymbol{x}(\mu), \boldsymbol{y}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu))$ は，その最適解の一つ (最適解集合の解析的中心) に収束する．したがって，$\mu \to 0$ となるように，このパスの近傍に点列を生成することにより，主双対問題の近似的な最適解を求めることができる．これが，主双対パス追跡法の基本的な考え方である．

中心パスの近傍，すなわち中心パスをその内部に含み，実行可能内点の集合 F^0_{PD} に含まれる集合を N とし，N 上の初期点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0) \in N$ が既知であるとする．この内点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ から，パスの近傍 N 上に内点の列 $\{(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)\}$ を生成する．そこで，k 番目の内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \in N$ が得られているとして，次の内点の求め方を示す．

内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ に対して，パラメータの値を $\mu_k = (\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{z}^k / n$ とすれば，$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \in \hat{F}_{PD}(n\mu_k)$ となる．したがって，その多面体 $\hat{F}_{PD}(n\mu_k)$ の解析的中心が内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ から最も近い解析的中心である．点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ からこの解析的中心を目指すと，パスに近づくことができても，目的関数値 (双対ギャップ) を減少させることができない．そこで，定数 $\gamma \in [0, 1]$ に対して

$$\mu = \gamma \mu_k \tag{5}$$

としたときの解析的中心 $(\boldsymbol{x}(\mu), \boldsymbol{y}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu))$ を目標とする．それは，方程式系 (4) の解であるので，現在の点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ からニュートン法を使い，その解析的中心を目指す．

ニュートン方向を $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ とすれば，それは線形方程式系

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^T & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{Z}_k & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{x} \\ \Delta\boldsymbol{y} \\ \Delta\boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \gamma\mu_k\boldsymbol{e} - \boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k \end{pmatrix} \tag{6}$$

の解である．上の方程式系の解は，順に

$$\begin{aligned} &\Delta\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}_k^{-1}\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{A}^T)^{-1}(\boldsymbol{b} - \gamma\mu_k\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}_k^{-1}\boldsymbol{e}) \\ &\Delta\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y} \\ &\Delta\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{Z}_k^{-1}\boldsymbol{X}_k\Delta\boldsymbol{z} + (\gamma\mu_k\boldsymbol{Z}_k^{-1}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x}^k) \end{aligned} \tag{7}$$

と計算できる．内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ から，この方向 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ へステップサイズ α だけ進んだ次の点を

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{k+1} \\ \boldsymbol{y}^{k+1} \\ \boldsymbol{z}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^k \\ \boldsymbol{y}^k \\ \boldsymbol{z}^k \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{x} \\ \Delta\boldsymbol{y} \\ \Delta\boldsymbol{z} \end{pmatrix} \tag{8}$$

とする．ただし，次の点がパスの近傍 N 上の点となるようにステップサイズ $\alpha > 0$ を決める必要がある．このとき，$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ が実行可能解であるので，(6) より

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k + \alpha\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ &\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^{k+1} + \boldsymbol{z}^{k+1} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^k + \boldsymbol{z}^k + \alpha(\boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y} + \Delta\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

となるので，$(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ は，主双対問題 (3) の実行可能解である．

アルゴリズム 1.3 主双対パス追跡法は，次のステップから成る．

ステップ 0　中心パスの近傍 N を定め，初期内点を $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0) \in N$，$\gamma \in [0, 1)$，$k = 0$ とする．

ステップ 1　点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ において，$\mu_k = (\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k/n$ とし，式 (7) により探索方向 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ を計算する．

ステップ 2　次の点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ が中心パスの近傍 N 上の点となるようにステップサイズ $\alpha > 0$ を決め，式 (8) により内点を更新する．反復回数 k を 1 増加し，ステップ 1 へ戻る．

中心パスの近傍としては，定数 $\beta \in (0, 1)$ に対して，次の 2 種類

$$\begin{aligned} N_{-\infty}(\beta) &= \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in F_{PD}^0 \mid \boldsymbol{X}\boldsymbol{z} \geq (1-\beta)\mu\boldsymbol{e}, \mu = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z}/n\} \\ N_2(\beta) &= \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in F_{PD}^0 \mid \|\boldsymbol{X}\boldsymbol{z} - \mu\boldsymbol{e}\| \leq \beta\mu, \mu = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z}/n\} \end{aligned}$$

がよく使われる．近傍 $N_{-\infty}(\beta)$ は，$\beta=1$ とすると，実行可能領域の内部 F^0_{PD} 全体と一致するので，β として 1 に近い値を使えば，かなり広い近傍であるといえる．一方，近傍 $N_2(\beta)$ は，$\beta=1$ としても，n が大きいときには，実行可能領域の内部 F^0_{PD} 全体と比べると，かなり狭い近傍となっている．

1.3 中心パスの広い近傍を使ったパス追跡法

Kojima, Mizuno, and Yoshise [1] によって提案された主双対パス追跡法は，前節で説明したアルゴリズム 1.3 において，近傍として

$$N_{-\infty}(\beta)=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in F^0_{PD} \mid \boldsymbol{X}\boldsymbol{z}\geq(1-\beta)\mu\boldsymbol{e},\mu=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z}/n\}$$

を使っている．その場合について，アルゴリズムの反復回数を評価する．初期点 $(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0,\boldsymbol{z}^0)$ が $N_{-\infty}(\beta)$ 上の点であり，アルゴリズム 1.3 により，その近傍上に点列 $\{(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{z}^k)\}$ が生成されているとする．

$(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{z}^k)\in N_{-\infty}(\beta)$ $(\beta\in(0,1))$ であるとき，更新した点 $(\boldsymbol{x}^{k+1},\boldsymbol{y}^{k+1},\boldsymbol{z}^{k+1})$ が近傍 $N_{-\infty}(\beta)$ に入るためのステップサイズを評価したい．そこで，式 (6)，(8) ならびに $\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k\geq(1-\beta)\mu_k\boldsymbol{e}$ より

$$\begin{aligned}
x_i^{k+1}z_i^{k+1}&=(x_i^k+\alpha\Delta x_i)(z_i^k+\alpha\Delta z_i)\\
&=x_i^kz_i^k+\alpha(x_i^k\Delta z_i+z_i^k\Delta x_i)+\alpha^2\Delta x_i\Delta z_i\\
&=x_i^kz_i^k+\alpha(\gamma\mu_k-x_i^kz_i^k)+\alpha^2\Delta x_i\Delta z_i\\
&\geq(1-\alpha)(1-\beta)\mu_k+\alpha\gamma\mu_k+\alpha^2\Delta x_i\Delta z_i
\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}^{k+1})^T\boldsymbol{z}^{k+1}&=\sum_{i=1}^n(x_i^kz_i^k+\alpha(\gamma\mu_k-x_i^kz_i^k)+\alpha^2\Delta x_i\Delta z_i)\\
&=(1-\alpha+\alpha\gamma)n\mu_k
\end{aligned}\tag{9}$$

を得る．ここで，最後の等式の導出には

$$\Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{z}=\Delta\boldsymbol{x}(-\boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y})=0\tag{10}$$

を使っている．点 $(\boldsymbol{x}^{k+1},\boldsymbol{y}^{k+1},\boldsymbol{z}^{k+1})$ が近傍 $N_{-\infty}(\beta)$ $(\beta\in(0,1))$ に含まれるための十分条件は，ステップサイズを $\hat{\alpha}$ とするとき，任意の $\alpha\in[0,\hat{\alpha}]$ に対して，$1-\alpha+\alpha\gamma>0$ と

$$x_i^{k+1}z_i^{k+1}\geq(1-\beta)(\boldsymbol{x}^{k+1})^T\boldsymbol{z}^{k+1}/n$$

あるいは，上の評価式を使って

$$(1-\alpha)(1-\beta)\mu_k + \alpha\gamma\mu_k + \alpha^2 \Delta x_i \Delta z_i \geq (1-\beta)(1-\alpha+\alpha\gamma)\mu_k \tag{11}$$

が任意の $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ で成り立つことである．なお，$1-\alpha+\alpha\gamma > 0$ より，式 (11) の右辺が (したがって左辺も) 任意の $\alpha \in [0,\hat{\alpha}]$ に対して正であるので，連続性から $\boldsymbol{x}^{k+1} > \mathbf{0}$ と $\boldsymbol{z}^{k+1} > \mathbf{0}$ も満たす．(もし $\boldsymbol{x}^{k+1}$ あるいは $\boldsymbol{z}^{k+1}$ に 0 以下の要素が存在するとしたら，$x_i^{k+1} z_i^{k+1}$ を α の 2 次式とみたとき，その連続性から $x_i^{k+1} z_i^{k+1} = 0$ となる α が存在するが，それは式 (11) の右辺が任意の $\alpha \in [0,\hat{\alpha}]$ に対して正であることに矛盾する．) 上の不等式 (11) を整理すると $-\alpha\Delta x_i \Delta z_i \leq \beta\gamma\mu_k$ となるので，次の補題が得られる．

補題 1.4 アルゴリズム 1.3 において，$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \in N_{-\infty}(\beta)$ から次の点を求めるとき，任意の $\alpha \in [0,\hat{\alpha}]$ に対して，不等式

$$1-\alpha+\alpha\gamma > 0$$

と

$$-\alpha\Delta x_i \Delta z_i \leq \beta\gamma\mu_k \text{ for all } i \in \{1,2,\cdots,n\}$$

が成り立つならば，ステップサイズを $\hat{\alpha}$ としたときに $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1}) \in N_{-\infty}(\beta)$ である．

つぎに，補題の後半の不等式の左辺にある $-\Delta x_i \Delta z_i$ の大きさを評価する．そのために，(6) の第 3 式の両辺に $(\boldsymbol{X}_k \boldsymbol{Z}_k)^{-1/2}$ を乗ずると

$$\boldsymbol{X}_k^{-1/2} \boldsymbol{Z}_k^{1/2} \Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{Z}_k^{-1/2} \boldsymbol{X}_k^{1/2} \Delta\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}_k \boldsymbol{Z}_k)^{-1/2}(\gamma\mu_k \boldsymbol{e} - \boldsymbol{X}_k \boldsymbol{z}^k) \tag{12}$$

が得られる．この左辺の二つのベクトルを $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{X}_k^{-1/2} \boldsymbol{Z}_k^{1/2} \Delta\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{Z}_k^{-1/2} \boldsymbol{X}_k^{1/2} \Delta\boldsymbol{z}$ とし，右辺のベクトルを $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{X}_k \boldsymbol{Z}_k)^{-1/2}(\gamma\mu_k \boldsymbol{e} - \boldsymbol{X}_k \boldsymbol{z}^k)$ とすれば，(10) より $\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{q} = \Delta\boldsymbol{x}^T \Delta\boldsymbol{z} = 0$ となる．したがって，次の補題を使うと，任意の $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ に対して

$$|p_i q_i| = |\Delta x_i \Delta z_i| \leq \frac{1}{4} \|(\boldsymbol{X}_k \boldsymbol{Z}_k)^{-1/2}(\gamma\mu_k \boldsymbol{e} - \boldsymbol{X}_k \boldsymbol{z}^k)\|^2 \tag{13}$$

が得られる．

補題 1.5 3 つの n 次ベクトル $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{r}$ が $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{q}=0$ を満たすならば

$$|p_i q_i| \leq \frac{1}{4}\|\boldsymbol{r}\|^2 \text{ for any } i \in \{1,2,\cdots,n\}$$

と

$$\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{q}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}\|\boldsymbol{r}\|^2$$

が成立する．ここで，$\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{p})$ は，ベクトル $\boldsymbol{p}$ の要素を対角要素とする対角行列である．

証明 $p_i > 0$ かつ $q_i > 0$ ならば，相加相乗平均の不等式より，

$$4|p_i q_i| \leq (p_i + q_i)^2 = r_i^2$$

が成り立つ．この不等式は $p_i < 0$ かつ $q_i < 0$ のときも成り立つので，

$$4\sum_{p_i q_i > 0} |p_i q_i| \leq \sum_{p_i q_i > 0} r_i^2 \leq \|\boldsymbol{r}\|^2$$

が成り立つ．一方，$\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{q} = 0$ より $\sum_{p_i q_i > 0} p_i q_i = -\sum_{p_i q_i < 0} p_i q_i$ であるので，

$$4\sum_{p_i q_i < 0} |p_i q_i| = 4\sum_{p_i q_i > 0} |p_i q_i| \leq \|\boldsymbol{r}\|^2$$

も成り立つ．したがって，前者の不等式が成り立つ．後者の不等式も，

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{q}\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} (p_i q_i)^2 \\
&= \sum_{p_i q_i > 0} (p_i q_i)^2 + \sum_{p_i q_i < 0} (p_i q_i)^2 \\
&\leq \left(\sum_{p_i q_i > 0} |p_i q_i|\right)^2 + \left(\sum_{p_i q_i < 0} |p_i q_i|\right)^2 \\
&\leq 2\left(\frac{1}{4}\|\boldsymbol{r}\|^2\right)^2
\end{aligned}$$

より得られる． ▮

補足説明 1.6 上の補題は 2 つの結果を述べているが，この節では前半のみを使う．後半の結果は，次節以降で使う．

不等式 (13) から，次の補題が得られる．

補題 1.7 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \in N_{-\infty}(\beta)$ であるとき，方程式 (6) の解を $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ とすれば，任意の $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して

$$|\Delta x_i \Delta z_i| \leq \frac{1}{4}\left(1 - 2\gamma + \frac{\gamma^2}{1-\beta}\right) n\mu_k$$

が成立する．

証明 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \in N_{-\infty}(\beta)$ より $x_i^k z_i^k \geq (1-\beta)\mu_k$ であるので，

$$\begin{aligned}
\|(\boldsymbol{X}_k \boldsymbol{Z}_k)^{-1/2}(\gamma\mu_k \boldsymbol{e} - \boldsymbol{X}_k \boldsymbol{z}^k)\|^2 &= \sum_{i=1}^n \frac{(\gamma\mu_k - x_i^k z_i^k)^2}{x_i^k z_i^k} \\
&= \sum_{i=1}^n \left(x_i^k z_i^k - 2\gamma\mu_k + \frac{\gamma^2(\mu_k)^2}{x_i^k z_i^k} \right) \\
&\leq n\mu_k - 2\gamma n\mu_k + \frac{n\gamma^2(\mu_k)^2}{(1-\beta)\mu_k}
\end{aligned}$$

となる．これと不等式 (13) から補題の結果が成り立つ． ▮

定理 1.8 $n \geq 2$ とする．主双対パス追跡法のアルゴリズム 1.3 において，$\beta = 0.5$, $\gamma = 0.5$ とし，$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \in N_{-\infty}(\beta)$ とするとき，

$$\alpha = \frac{2}{n}$$

とすれば，$(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1}) \in N_{-\infty}(\beta)$ となる．

証明 $\beta = 0.5$，$\gamma = 0.5$ とする．補題 1.7 より，任意の $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して

$$|\Delta x_i \Delta z_i| \leq \frac{1}{8} n\mu_k$$

となる．一方，$\beta\gamma\mu_k = \mu_k/4$ である．したがって，補題 1.4 より，結果が導かれる． ▮

この結果から，アルゴリズム 1.3 で近傍として $N_{-\infty}(0.5)$ を使い，初期点がその近傍内にあり，各反復でステップサイズ $\alpha = 2/n$ (あるいは更新される点が近傍 $N_{-\infty}(0.5)$ 内にあるという条件で，それ以上のステップサイズ）とすれば，生成されるすべての点がその近傍内にある．このとき，式 (9) より

$$(\boldsymbol{x}^{k+1})^T \boldsymbol{z}^{k+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) (\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{z}^k$$

が成立する．したがって，初期点において $(\boldsymbol{x}^0)^T \boldsymbol{z}^0 = 2^{O(L)}$ であるならば，$k = O(nL)$ に対して，$(\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{z}^k \leq 2^{-2L}$ を満たす実行可能内点が得られる．以上のことから，次の定理が成り立つ．

定理 1.9 $n \geq 2$ とする．アルゴリズム 1.3 において，$\beta = 0.5, \gamma = 0.5$ とし，$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0) \in N_{-\infty}(\beta)$ とするとき，近傍 $N_{-\infty}(\beta)$ を使えば，$O(nL)$ 反復で主双対問題 (3) を解くことができる．

1.4 中心パスの狭い近傍を使ったパス追跡法

Kojima, Mizuno, and Yoshise [2] と Monteiro and Adler [4] が提案したパス追跡法は，アルゴリズム 1.3 で，近傍として，$\beta \in (0,1)$ に対して

$$N_2(\beta) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in F^0_{PD} \mid \|\boldsymbol{X}\boldsymbol{z} - \mu\boldsymbol{e}\| \le \beta\mu\}$$

を使った場合である．その場合について，アルゴリズムの反復回数を評価する．初期点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ が $N_2(\beta)$ 上の点であり，アルゴリズム 1.3 により，その近傍上に点列 $\{(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)\}$ が生成されているとする．

更新した点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ が近傍 $N_2(\beta)$ $(\beta \in (0,1))$ に入るためのステップサイズを評価したい．式 (6)，(8)，(9) より

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{X}_{k+1}\boldsymbol{z}^{k+1} - \frac{(\boldsymbol{x}^{k+1})^T\boldsymbol{z}^{k+1}}{n}\boldsymbol{e}\| \\
&\quad = \|(\boldsymbol{X}_k + \alpha\Delta\boldsymbol{X})(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z}) - (1-\alpha+\alpha\gamma)\mu_k\boldsymbol{e}\| \\
&\quad = \|\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k + \alpha(\boldsymbol{Z}_k\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{X}_k\Delta\boldsymbol{z}) + \alpha^2\Delta\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{z} - (1-\alpha+\alpha\gamma)\mu_k\boldsymbol{e}\| \\
&\quad = \|\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k + \alpha(\gamma\mu_k\boldsymbol{e} - \boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k) + \alpha^2\Delta\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{z} - (1-\alpha+\alpha\gamma)\mu_k\boldsymbol{e}\| \\
&\quad \le |1-\alpha|\|\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k - \mu_k\boldsymbol{e}\| + \alpha^2\|\Delta\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{z}\| \\
&\quad \le |1-\alpha|\beta\mu_k + \alpha^2\|\Delta\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{z}\|
\end{aligned} \tag{14}$$

を得る．点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ が近傍 $N_2(\beta)$ $(\beta \in (0,1))$ に含まれるための十分条件は，ステップサイズを $\hat{\alpha}$ とするとき，任意の $\alpha \in [0, \hat{\alpha}]$ に対して，$1 - \alpha + \alpha\gamma > 0$ と

$$\|\boldsymbol{X}_{k+1}\boldsymbol{z}^{k+1} - \frac{(\boldsymbol{x}^{k+1})^T\boldsymbol{z}^{k+1}}{n}\boldsymbol{e}\| \le \frac{\beta(\boldsymbol{x}^{k+1})^T\boldsymbol{z}^{k+1}}{n}$$

あるいは，上の評価式と (9) を使って

$$|1-\alpha|\beta\mu_k + \alpha^2\|\Delta\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{z}\| \le \beta(1-\alpha+\alpha\gamma)\mu_k$$

が成り立つことである．ここで，$\alpha \in (0,1]$ とすれば，上の不等式は

$$\alpha\|\Delta\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{z}\| \le \beta\gamma\mu_k \tag{15}$$

と整理できる．前節と同様に，式 (12) とその下に定義した $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{r}$ ならびに補題 1.5 の後半を使うと，

$$\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{q}\| = \|\Delta\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{z}\| \le \frac{\sqrt{2}}{4}\|(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Z}_k)^{-1/2}(\gamma\mu_k\boldsymbol{e} - \boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k)\|^2 \tag{16}$$

が得られる．この不等式から，次の補題が得られる．

補題 1.10 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \in N_2(\beta)$ であるとき，方程式 (6) の解を $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ とすれば

$$\|\Delta\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{z}\| \le \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\beta^2 + (1-\gamma)^2 n}{1-\beta}\mu_k$$

が成立する．

証明 不等式 (16) の右辺を評価するために，まず

$$\|(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Z}_k)^{-1/2}(\gamma\mu_k\boldsymbol{e} - \boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k)\|^2 \le \|(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Z}_k)^{-1}\|\|\gamma\mu_k\boldsymbol{e} - \boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k\|^2$$

を得る．$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \in N_2(\beta)$ より $\|\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k - \mu_k\boldsymbol{e}\| \le \beta\mu_k$ であるので，

$$\|(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Z}_k)^{-1}\| = \max_i \frac{1}{x_i^k z_i^k} = \frac{1}{\min_i x_i^k z_i^k} \le \frac{1}{(1-\beta)\mu_k}$$

が成立し，さらに

$$\begin{aligned}
\|\gamma\mu_k\boldsymbol{e} - \boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k\|^2 &= \|(\boldsymbol{X}^k\boldsymbol{z}^k - \mu_k\boldsymbol{e}) + (1-\gamma)\mu_k\boldsymbol{e}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{X}^k\boldsymbol{z}^k - \mu_k\boldsymbol{e}\|^2 + 2(1-\gamma)\mu_k(\boldsymbol{X}^k\boldsymbol{z}^k - \mu_k\boldsymbol{e})^T\boldsymbol{e} + \|(1-\gamma)\mu_k\boldsymbol{e}\|^2 \\
&\le (\beta\mu_k)^2 + 0 + ((1-\gamma)\mu_k)^2 n
\end{aligned}$$

となるので，不等式 (16) から補題の結果が成り立つ．∎

補足説明 1.11 行列 $\boldsymbol{A}$ のノルムは,

$$\|\boldsymbol{A}\| = \max_{\|x\|=1}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|$$

である．したがって,

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| \le \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}\|$$

が成立する．$\boldsymbol{x}$ をベクトル，$\boldsymbol{X} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{x})$ をその対角行列とすれば

$$\|\boldsymbol{X}\| = \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$$

である．

定理 1.12 $n \ge 2$ とする．アルゴリズム 1.3 において，$\beta = \frac{2}{5}$，$\gamma = 1 - \frac{2}{5\sqrt{n}}$ とし，$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \in N_2(\beta)$ とするとき，任意の $\alpha \in (0, 1]$ に対して，$(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1}) \in N_2(\beta)$ となる．

証明 $\beta=\frac{2}{5}$，$\gamma=1-\frac{2}{5\sqrt{n}}$ とする．補題 1.10 より

$$\|\Delta\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{z}\|\le\frac{2\sqrt{2}}{15}\mu_k$$

となる．一方，$\beta\gamma\mu_k\ge\frac{6}{25}\mu_k$ である．したがって，$\frac{6}{25}\ge\frac{2\sqrt{2}}{15}$ より，任意の $\alpha\in(0,1]$ に対して不等式 (15) と $1-\alpha+\alpha\gamma>0$ が成り立つので，結果が導かれる． ▌

この結果から，アルゴリズム 1.3 で近傍として $N_2(2/5)$ を使い，初期点がその近傍内にあり，各反復でステップサイズ $\alpha=1$ (あるいは更新される点が近傍 $N_2(2/5)$ 内にあるという条件で，それ以上のステップサイズ）とすれば，すべての生成される点がその近傍内にある．このとき，式 (9) より

$$(\boldsymbol{x}^{k+1})^T\boldsymbol{z}^{k+1}\le\left(1-\frac{2}{5\sqrt{n}}\right)(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k$$

が成立する．したがって，初期点において $(\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{z}^0=2^{O(L)}$ であるならば，$k=O(\sqrt{n}L)$ に対して，$(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k\le2^{-2L}$ を満たす実行可能内点が得られる．以上のことから，次の定理が成り立つ．

定理 1.13 $n\ge2$ とする．アルゴリズム 1.3 において，$\beta=\frac{2}{5}$，$\gamma=1-\frac{2}{5\sqrt{n}}$ とし，$(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0,\boldsymbol{z}^0)\in N_2(\beta)$ とするとき，近傍 $N_2(\beta)$ を使えば，$O(\sqrt{n}L)$ 反復で主双対問題 (3) を解くことができる．

前節の結果とこの節の結果を比べると，狭い近傍 $N_2(\beta)$ を使った場合のほうが，広い近傍 $N_{-\infty}(\beta)$ を使う場合に比べ，最悪の場合の (理論的な) 反復回数が少ない．一方，狭い近傍 $N_2(\beta)$ を使った場合のステップサイズ α は 1 であり，実際の計算においても 1 に比べずっと大きなステップサイズが取れることはあまりなく，ほとんどの問題で理論的な評価と同程度の反復回数を必要とする．他方，広い近傍 $N_{-\infty}(\beta)$ を使った場合のステップサイズ α は $2/n$ であり，非常に小さいが，実際の計算では，それよりも大きなステップサイズ (例えば n に依存しない 0.5 などの定数) をとれることが多く，理論的な上界よりもかなり少ない反復回数で済むことが多い．したがって，実際の計算では，広い近傍 $N_{-\infty}(\beta)$ を使った場合に，狭い近傍を使った場合より，効率よいことが多い．このことから，アルゴリズム 1.3 は，狭い近傍 $N_2(\beta)$ を使った場合に，ショートステップパス追跡法と呼ばれ，広い近傍 $N_{-\infty}(\beta)$ を使った場合にロングステップパス追跡法と呼ばれることがある．

1.5 プレディクタ・コレクタ法

ここでは，Mizuno, Todd, and Ye [3] によって提案されたプレディクタ・コレクタ法を解説する．この方法は，$0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$ を満たす二つのパラメータに対して，中心パスの大小二つの近傍 $N_2(\beta_2)$ と $N_2(\beta_1)$ を使う．初期点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0) \in N_2(\beta_1)$ がわかっているときに，この小さい方の近傍 $N_2(\beta_1)$ 上に点列 $\{(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)\}$ を生成する．ただし，各反復はプレディクタステップとコレクタステップからなり，プレディクタステップ後に計算される中間点は大きい方の近傍 $N_2(\beta_2)$ 上にある．k 番目の点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \in N_2(\beta_1)$ が求められているとして，次の点の求め方を説明する．

内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \in N_2(\beta_1)$ において，アフィンスケーリング方向，すなわち (6) において $\gamma = 0$ とした方程式系

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^T & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{Z}_k & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{x} \\ \Delta \boldsymbol{y} \\ \Delta \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{X}_k \boldsymbol{z}^k \end{pmatrix} \tag{17}$$

の解を順に

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{y} &= (\boldsymbol{A} \boldsymbol{Z}_k^{-1} \boldsymbol{X}_k \boldsymbol{A}^T)^{-1} \boldsymbol{b} \\ \Delta \boldsymbol{z} &= -\boldsymbol{A}^T \Delta \boldsymbol{y} \\ \Delta \boldsymbol{x} &= -\boldsymbol{Z}_k^{-1} \boldsymbol{X}_k \Delta \boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}^k \end{aligned} \tag{18}$$

と計算する．この探索方向に進んだとき，近傍 $N_2(\beta_2)$ 上にとどまる最大のステップサイズ

$$\hat{\alpha} = \max\{\alpha | (\boldsymbol{x}^k + \alpha \Delta \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^k + \alpha \Delta \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}^k + \alpha \Delta \boldsymbol{z}) \in N_2(\beta_2)\} \tag{19}$$

を求める．そして，中間点

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^k \\ \boldsymbol{y}^k \\ \boldsymbol{z}^k \end{pmatrix} + \hat{\alpha} \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{x} \\ \Delta \boldsymbol{y} \\ \Delta \boldsymbol{z} \end{pmatrix} \tag{20}$$

を計算する．ここまでをプレディクタステップという．プレディクタステップは，アフィンスケーリング法の 1 反復を実施するが，そのステップサイズを近傍 $N_2(\beta_2)$ 上にとどまる最大値にするところに特徴がある．

中間点 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ におけるセンタリング方向，すなわち方程式系 (6) において，$\gamma = 1$ とし，$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ と μ_k の代わりに $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ と $\mu' = \boldsymbol{x}'^T \boldsymbol{z}'/n$ を使った方程式系

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^T & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{Z}' & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{x}' \\ \Delta \boldsymbol{y}' \\ \Delta \boldsymbol{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \mu' \boldsymbol{e} - \boldsymbol{X}' \boldsymbol{z}' \end{pmatrix} \tag{21}$$

の解を順に

$$\begin{array}{l} \Delta \boldsymbol{y}' = (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z}')^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}^T)^{-1}(\boldsymbol{b} - \mu'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z}')^{-1}\boldsymbol{e}) \\ \Delta \boldsymbol{z}' = -\boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y}' \\ \Delta \boldsymbol{x}' = -(\boldsymbol{Z}')^{-1}\boldsymbol{X}'\Delta\boldsymbol{z}' + (\mu'(\boldsymbol{Z}')^{-1}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x}') \end{array} \tag{22}$$

と計算する．ステップサイズ $\alpha = 1$ として，更新した点を

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{k+1} \\ \boldsymbol{y}^{k+1} \\ \boldsymbol{z}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{z}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{x}' \\ \Delta\boldsymbol{y}' \\ \Delta\boldsymbol{z}' \end{pmatrix} \tag{23}$$

とする．このとき，たとえば $\beta_1 = 1/4$ かつ $\beta_2 = 1/2$ とすれば，点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ が小さい方の近傍 $N_2(\beta_1)$ 上にあることを後に示す．ここまでのステップがコレクタステップである．

アルゴリズム 1.14 Mizuno-Todd-Ye のプレディクタ・コレクタ法は，次のステップから成る．

ステップ 0 $\beta_1 = 1/4$，$\beta_2 = 1/2$ とし，初期内点を $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0) \in N_2(\beta_1)$，$k = 0$ とする．

ステップ 1 (プレディクタステップ) 点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ において，アフィンスケーリング方向 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ を式 (18) により計算する．ステップサイズ $\hat{\alpha}$ を (19) により求め，中間点 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ を式 (20) により求める．

ステップ 2 (コレクタステップ) 中間点 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ において，式 (22) によりセンタリング方向 $(\Delta\boldsymbol{x}', \Delta\boldsymbol{y}', \Delta\boldsymbol{z}')$ を計算し，スップサイズ $\alpha = 1$ として，式 (23) により内点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ を求める．反復回数 k を 1 増加し，ステップ 1 へ戻る．

プレディクタステップでのステップサイズ $\hat{\alpha}$ の大きさを評価する．$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \in N_2(\beta_1)$ であるので，式 (14) と同様に $\gamma = 0$ のときにも

$$\|\boldsymbol{X}'\boldsymbol{z}' - \frac{\boldsymbol{x}'^T\boldsymbol{z}'}{n}\boldsymbol{e}\| \leq |1-\alpha|\beta_1\mu_k + \alpha^2\|\Delta\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{z}\|$$

を得る．また，$\gamma = 0$ と (9) より

$$\mu' = \frac{\boldsymbol{x}'^T\boldsymbol{z}'}{n} = (1-\alpha)\mu_k \tag{24}$$

となる．点 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ が近傍 $N_2(\beta_2)$ に含まれるための十分条件は，ステップサイズを $\hat{\alpha}$ とするとき，任意の $\alpha \in [0, \hat{\alpha}]$ に対して，$1 - \alpha > 0$ と

$$\|\boldsymbol{X}'\boldsymbol{z}' - \frac{\boldsymbol{x}'^T\boldsymbol{z}'}{n}\boldsymbol{e}\| \leq \beta_2\frac{\boldsymbol{x}'^T\boldsymbol{z}'}{n}$$

あるいは，上の評価式を使って

$$|1-\alpha|\beta_1\mu_k + \alpha^2\|\Delta \boldsymbol{X}\Delta \boldsymbol{z}\| \le \beta_2(1-\alpha)\mu_k$$

が成り立つことである．ここで，$\alpha \in (0,1]$ とすれば，上の不等式は

$$\alpha^2\|\Delta \boldsymbol{X}\Delta \boldsymbol{z}\| \le (1-\alpha)(\beta_2-\beta_1)\mu_k \tag{25}$$

と整理できる．1.3 節と同様に，式 (12) とその下に定義した $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{r}$ ならびに補題 1.5 の後半を使い，$\gamma = 0$ とすれば

$$\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{q}\| = \|\Delta \boldsymbol{X}\Delta \boldsymbol{z}\| \le \frac{\sqrt{2}}{4}\|(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Z}_k)^{1/2}\boldsymbol{e}\|^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}n\mu_k \tag{26}$$

が得られる．

補題 1.15 $\beta_1 = 1/4$，$\beta_2 = 1/2$ とする．アルゴリズム 1.14 のプレディクタステップにおいて，$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \in N_2(\beta_1)$ のとき，

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

とすれば，$(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}') \in N_2(\beta_2)$ となり，

$$\boldsymbol{x}'^T\boldsymbol{z}' = \left(1-\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k$$

が成立する．

証明 $\beta_1 = 1/4$，$\beta_2 = 1/2$ であるとき，$\hat{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ とすれば，任意の $\alpha \in [0, \hat{\alpha}]$ に対して，式 (26) より，不等式 (25) と $1-\alpha > 0$ が成立する．したがって，$(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}') \in N_2(\beta_2)$ となる．このとき，(24) より，後半の式が成り立つ． ∎

　つぎに, コレクタステップにおいて, $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}') \in N_2(\beta_2)$ ならば, $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1}) \in N_2(\beta_1)$ となることを示す．$(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}') \in N_2(\beta_2)$ であるので, 式 (14) と同様にして, $\gamma = 1$ と $\alpha = 1$ とすれば

$$\|\boldsymbol{X}_{k+1}\boldsymbol{z}^{k+1} - \frac{(\boldsymbol{x}^{k+1})^T\boldsymbol{z}^{k+1}}{n}\boldsymbol{e}\| \le \|\Delta \boldsymbol{X}'\Delta \boldsymbol{z}'\|$$

を得る．また，$\gamma = 1$ と (9) より

$$\mu_{k+1} = \frac{(\boldsymbol{x}^{k+1})^T\boldsymbol{z}^{k+1}}{n} = \mu' \tag{27}$$

となる．点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ が近傍 $N_2(\beta_1)$ に含まれるための十分条件は，任意の $\alpha \in [0,1]$ に対して

$$\|\boldsymbol{X}_{k+1}\boldsymbol{z}^{k+1} - \frac{(\boldsymbol{x}^{k+1})^T\boldsymbol{z}^{k+1}}{n}\boldsymbol{e}\| \leq \beta_1\mu_{k+1}$$

あるいは，上の評価式と $\beta_1 = \frac{1}{4}$ を使って

$$\|\Delta\boldsymbol{X}'\Delta\boldsymbol{z}'\| \leq \beta_1\mu' = \frac{1}{4}\mu' \tag{28}$$

が成り立つことである．ここで，点 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}') \in N_2(\beta_2)$ に対して補題 1.10 を適用し，$\gamma = 1$，$\beta = \beta_2 = \frac{1}{2}$ とすれば

$$\|\Delta\boldsymbol{X}'\Delta\boldsymbol{z}'\| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\beta_2^2}{1-\beta_2}\mu' = \frac{\sqrt{2}}{8}\mu'$$

が得られる．したがって，不等式 (28) が成立するので，次の結果が得られる．

補題 1.16 $\beta_1 = 1/4$，$\beta_2 = 1/2$ とする．アルゴリズム 1.14 のコレクタステップにおいて，$(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}') \in N_2(\beta_2)$ のとき，$(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1}) \in N_2(\beta_1)$ となり，

$$(\boldsymbol{x}^{k+1})^T\boldsymbol{z}^{k+1} = \boldsymbol{x}'^T\boldsymbol{z}'$$

が成立する．

以上の結果をまとめると，次の結果が得られる．

定理 1.17 $n \geq 2$ とする．アルゴリズム 1.14 において，$\beta_1 = 1/4$，$\beta_2 = 1/2$ とし，$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \in N_2(\beta_1)$ とするとき，$(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1}) \in N_1(\beta)$ となり，

$$(\boldsymbol{x}^{k+1})^T\boldsymbol{z}^{k+1} = \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k$$

が成立する．

この結果から, MTY プレディクタ・コレクタ法のアルゴリズム 1.14 により, $k = O(\sqrt{n}L)$ 反復で，主双対問題 (3) を解くことできる．

参考文献

[1] Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A.: “A Primal-Dual Interior Point Algorithm for Linear Programming”, *Progress in Mathematical Programming, Interior Point and Related Methods* (ed. N. Megiddo) Springer, New York (1989) 29–47.

[2] Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A.: "A Polynomial-Time Algorithm for a Class of Linear Complementarity Problems", *Mathematical Programming* 44 (1989) 1-26.

[3] Mizuno, S., Todd, M. J. and Ye, Y.: "On Adaptive-Step Primal-Dual Interior-Point Algorithms for Linear Programming", *Mathematics of Operations research* **18** (1993) 964–981.

[4] Monteiro, R. D. C. and Adler, I.: "Interior path following primal-dual algorithms. Part I: Linear programming," *Mathematical Programming* 44 (1989) 27-41.