対称錐計画問題に対する主双対内点法

中田 和秀

東京工業大学 社会理工学研究科

http://www.me.titech.ac.jp/~nakata/nakata.html

1-(a). 対称錐計画問題とは

Faybusovich(1997)
“Linear systems in Jordan algebras
and primal-dual interior-point algorithms”

特徴

- ▷ **目的関数は線形**
- ▷ **条件は線形制約と対称錐制約（非負制約, ２次錐制約, 半正定値制約など）**
- ▷ **線形計画・２次錐計画・半正定値計画を含む**
- ▷ **主双対内点法により，多項式時間で最適解が求まる**
- ▷ Euclid **的** Jordan **代数と深い関係**

Euclid 的 Jordan 代数とは

有限次元線形空間 V
Euclid 的 Jordan 代数 $\circ : V^2 \to V$

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \Re$$

- $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \circ \boldsymbol{x}$
- $(\alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2) \circ \boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}_1 \circ \boldsymbol{y} + \beta \boldsymbol{x}_2 \circ \boldsymbol{y}$
- $\boldsymbol{x} \circ ((\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{x}) \circ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{x}) \circ (\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y})$
- $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \circ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$

Euclid 的 Jordan 代数とは

有限次元線形空間 V

Euclid **的** Jordan **代数** $\circ : V^2 \to V$

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \Re$$

- $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \circ \boldsymbol{x}$
- $(\alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2) \circ \boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}_1 \circ \boldsymbol{y} + \beta \boldsymbol{x}_2 \circ \boldsymbol{y}$
- $\boldsymbol{x} \circ ((\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{x}) \circ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{x}) \circ (\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y})$
- $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \circ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$

線形計画 (LP) **の場合**

$$V = \Re^n, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \\ \vdots \\ x_n y_n \end{pmatrix}$$

Euclid 的 Jordan 代数とは

有限次元線形空間 V
Euclid **的** Jordan **代数** $\circ : V^2 \to V$

$$\begin{array}{l} \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \Re \\ \quad \triangleright \quad \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \circ \boldsymbol{x} \\ \quad \triangleright \quad (\alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2) \circ \boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}_1 \circ \boldsymbol{y} + \beta \boldsymbol{x}_2 \circ \boldsymbol{y} \\ \quad \triangleright \quad \boldsymbol{x} \circ ((\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{x}) \circ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{x}) \circ (\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y}) \\ \quad \triangleright \quad \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \circ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \end{array}$$

２次錐計画 (SOCP) **の場合**

$$V = \Re^n \equiv \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ \boldsymbol{x}_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_0 \in \Re,\ \boldsymbol{x}_1 \in \Re^{n-1} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \boldsymbol{x}_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_0 \\ \boldsymbol{y}_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_0 y_0 + \boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{y}_1 \\ x_0 \boldsymbol{y}_1 + y_0 \boldsymbol{x}_1 \end{pmatrix}$$

Euclid 的 Jordan 代数とは

有限次元線形空間 V

Euclid **的** Jordan **代数** $\circ : V^2 \to V$

$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \Re$

- $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \circ \boldsymbol{x}$
- $(\alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2) \circ \boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}_1 \circ \boldsymbol{y} + \beta \boldsymbol{x}_2 \circ \boldsymbol{y}$
- $\boldsymbol{x} \circ ((\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{x}) \circ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{x}) \circ (\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y})$
- $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \circ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$

半正定値計画 (SDP) **の場合**

$$V = \mathcal{S}^n \equiv \{\boldsymbol{X} \in \Re^{n \times n} \mid \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^T\},$$

$$\boldsymbol{X} \circ \boldsymbol{Y} \equiv (\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Y}\boldsymbol{X})/2$$

基本的な性質

- ▷ **単位元：** e

  $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$

- ▷ **逆元：** $\boldsymbol{x}^{-1}$

  $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{x}^{-1} = \boldsymbol{x}^{-1} \circ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}$

- ▷ **べき乗に対する結合法則**

  $\boldsymbol{x}^{\alpha}\boldsymbol{x}^{\beta} = \boldsymbol{x}^{\alpha+\beta}$

- ▷ **固有値分解：** $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \boldsymbol{c}_k$

  ただし、 $\boldsymbol{c}_k^2 = \boldsymbol{c}_k, \quad \boldsymbol{c}_i \circ \boldsymbol{c}_j = \boldsymbol{0}, \quad \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{c}_k = \boldsymbol{e}$

- ▷ **内積：** $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \equiv \sum_{k=1}^{r} \lambda_k (\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y})$

対称錐

対称錐

$$\boxed{\mathcal{K} \equiv \{\boldsymbol{x}^2 \in V \mid \boldsymbol{x} \in V\}}$$

性質

- $\triangleright$ $\mathcal{K}^* \equiv \{\boldsymbol{x} \in V \mid \forall \boldsymbol{y} \in \mathcal{K}, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \geq 0\} = \mathcal{K}$ **自己双対**
- $\triangleright$ $\boldsymbol{x} \in \mathcal{K} \ \Leftrightarrow \ \lambda(\boldsymbol{x}) \geq 0$ **非負固有値**
- $\triangleright$ $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{K}, \quad \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$
- $\triangleright$ **直線を含まない閉凸錐**
- $\triangleright$ $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathcal{K} \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{x} \succeq_{\mathcal{K}} \boldsymbol{y}$ **半順序関係**
- $\triangleright$ $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{int}(\mathcal{K}),\ \exists g \in GL(V),\ g\mathcal{K} = \mathcal{K},\ g\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ **等質空間**

対称錐計画問題

主問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \rangle \\ \text{subject to} & \mathcal{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \succeq_{\mathcal{K}} \boldsymbol{0}. \end{array}$$

双対問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y} \rangle \\ \text{subject to} & \boldsymbol{z} = \mathcal{A}^* \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}, \\ & \boldsymbol{z} \succeq_{\mathcal{K}} \boldsymbol{0}. \end{array}$$

変数： $\boldsymbol{x} \in V, \quad \boldsymbol{y} \in \Re^m, \quad \boldsymbol{z} \in V$

定数： $\boldsymbol{c} \in V, \quad \boldsymbol{b} \in \Re^m$

$\mathcal{A} : V \to \Re^m$ **線形写像**

$\mathcal{A}^* : \Re^m \to V$ $\mathcal{A}$ **の随伴オペレータ**

$$\langle \mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \mathcal{A}^* \boldsymbol{y} \rangle$$

$\mathcal{K}$: **対称錐**

対称錐計画問題

主問題		双対問題	
maximize	$\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \rangle$	minimize	$\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y} \rangle$
subject to	$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$	subject to	$\boldsymbol{z} = \mathcal{A}^*\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c},$
	$\boldsymbol{x} \succeq_{\mathcal{K}} \boldsymbol{0}.$		$\boldsymbol{z} \succeq_{\mathcal{K}} \boldsymbol{0}.$

変数： $\boldsymbol{x} \in V, \quad \boldsymbol{y} \in \Re^m, \quad \boldsymbol{z} \in V$

	V	**対称錐** $\mathcal{K}$
LP	$\Re^n$	$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \Re^n \mid x_i \geq 0\}$
SOCP	$\Re^n$	$\{(x_0, \boldsymbol{x}_1)^T \in \Re^n \mid x_0 \geq \|\boldsymbol{x}_1\|\}$
SDP	$\mathcal{S}^n$	$\{X \in \mathcal{S}^n \mid X$ **が半正定値** $\}$

最適解と中心パス

最適解の必要十分条件

$$\begin{cases} \mathcal{A}x = b & \cdots\cdots \textbf{主問題の実行可能性} \\ z = \mathcal{A}^* y - c & \cdots \textbf{双対問題の実行可能性} \\ x \circ z = \mathbf{0} & \cdots\cdots \textbf{相補性条件} \\ x, z \succeq_{\mathcal{K}} \mathbf{0} & \cdots\cdots \textbf{対称錐条件} \end{cases}$$

最適解と中心パス

最適解の必要十分条件

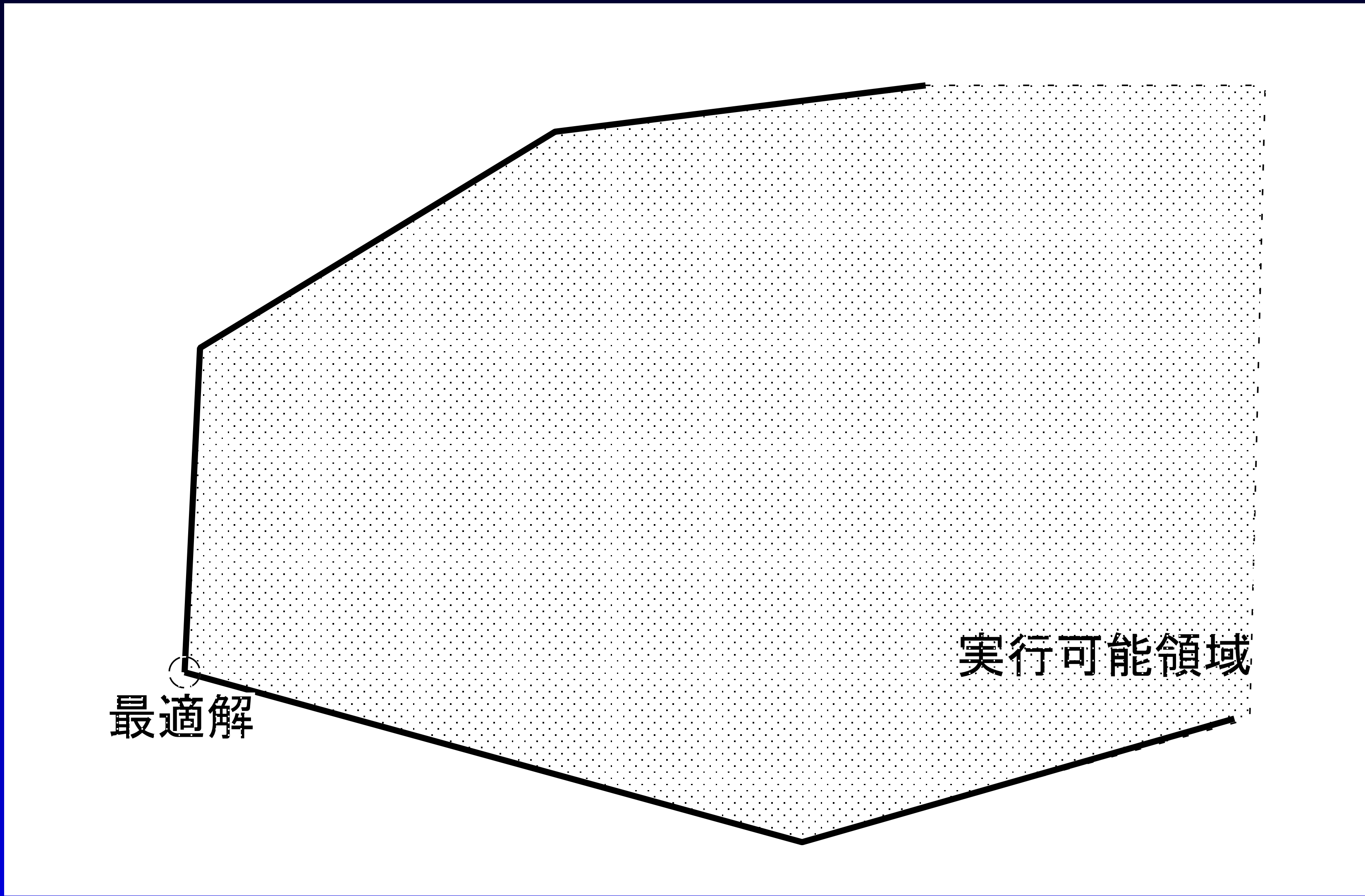
$$\begin{cases} \mathcal{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} & \cdots\cdots\ \textbf{主問題の実行可能性} \\ \boldsymbol{z} = \mathcal{A}^*\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c} & \cdots\ \textbf{双対問題の実行可能性} \\ \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} & \cdots\cdots\ \textbf{相補性条件} \\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \succeq_{\mathcal{K}} \boldsymbol{0} & \cdots\cdots\ \textbf{対称錐条件} \end{cases}$$

中心パス

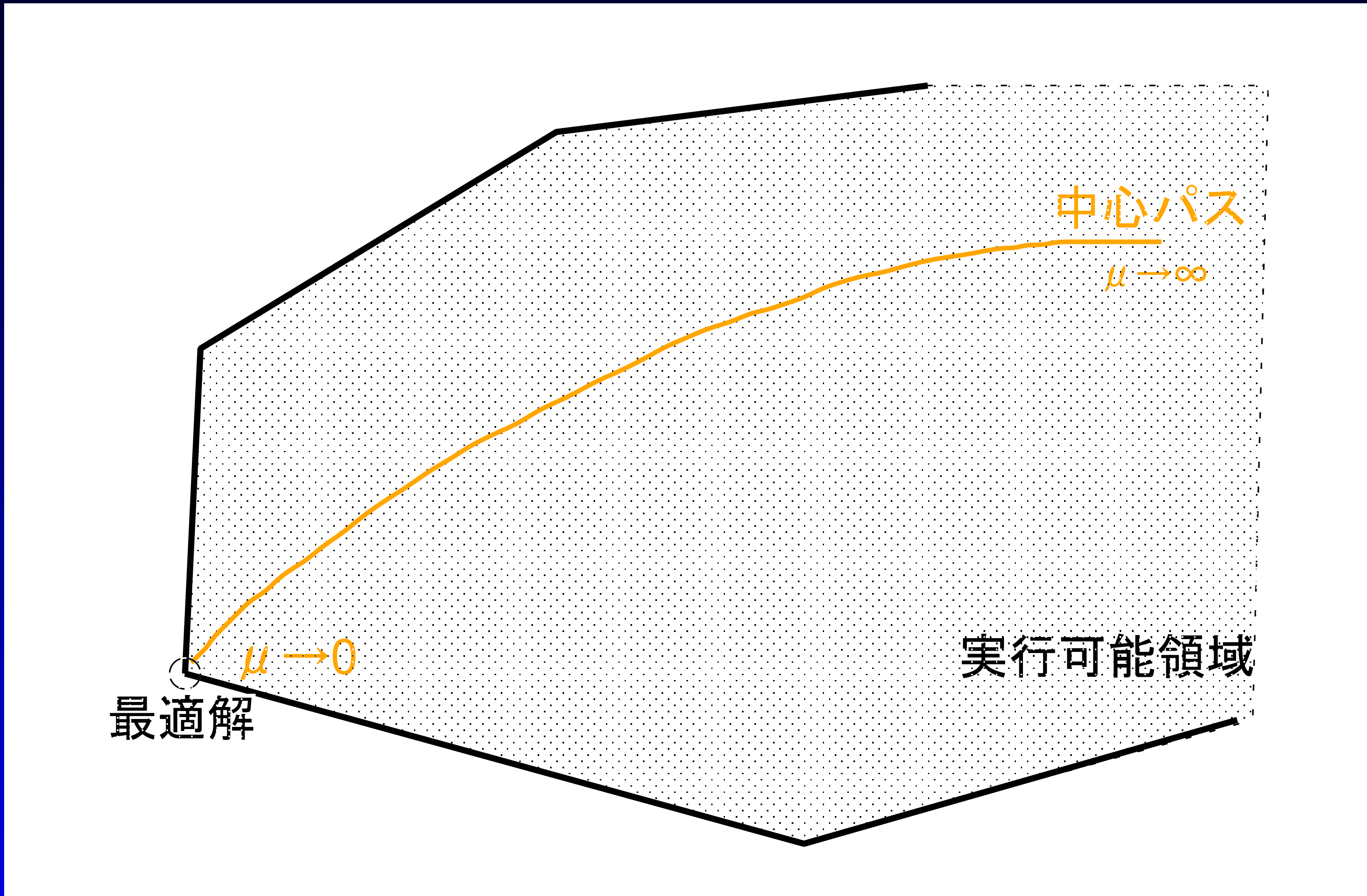
$$\left\{ \begin{array}{l|l} & \boldsymbol{z} = \mathcal{A}^*\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c} \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) & \mathcal{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \in V \times \Re^m \times V & \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{z} = \mu \boldsymbol{e}, \quad \exists \mu > 0 \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \succeq_{\mathcal{K}} \boldsymbol{0} \end{array} \right\}$$

▷ $\mu \to 0$ **のとき最適解に収束**

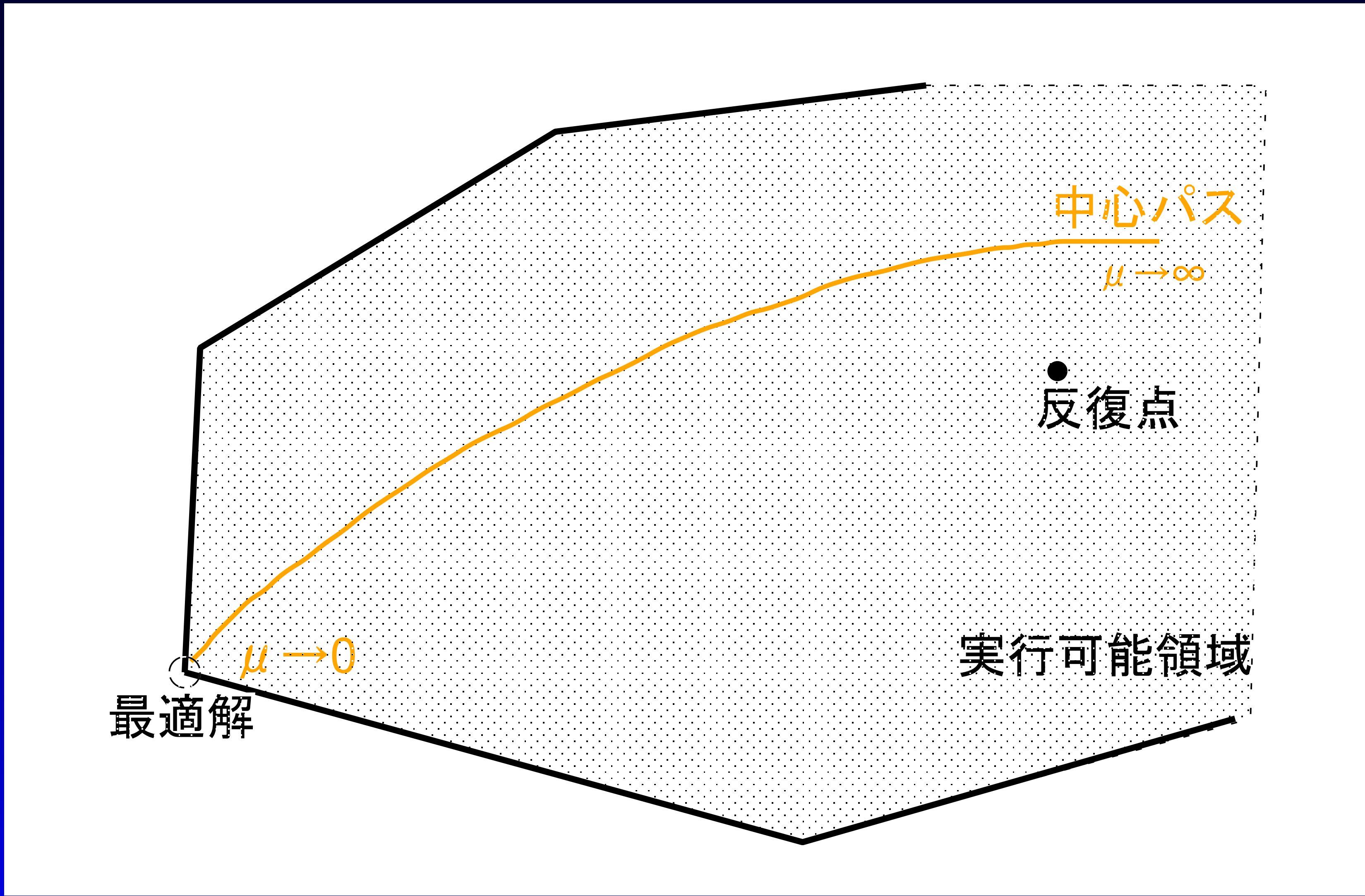
1-(b). 主双対内点法



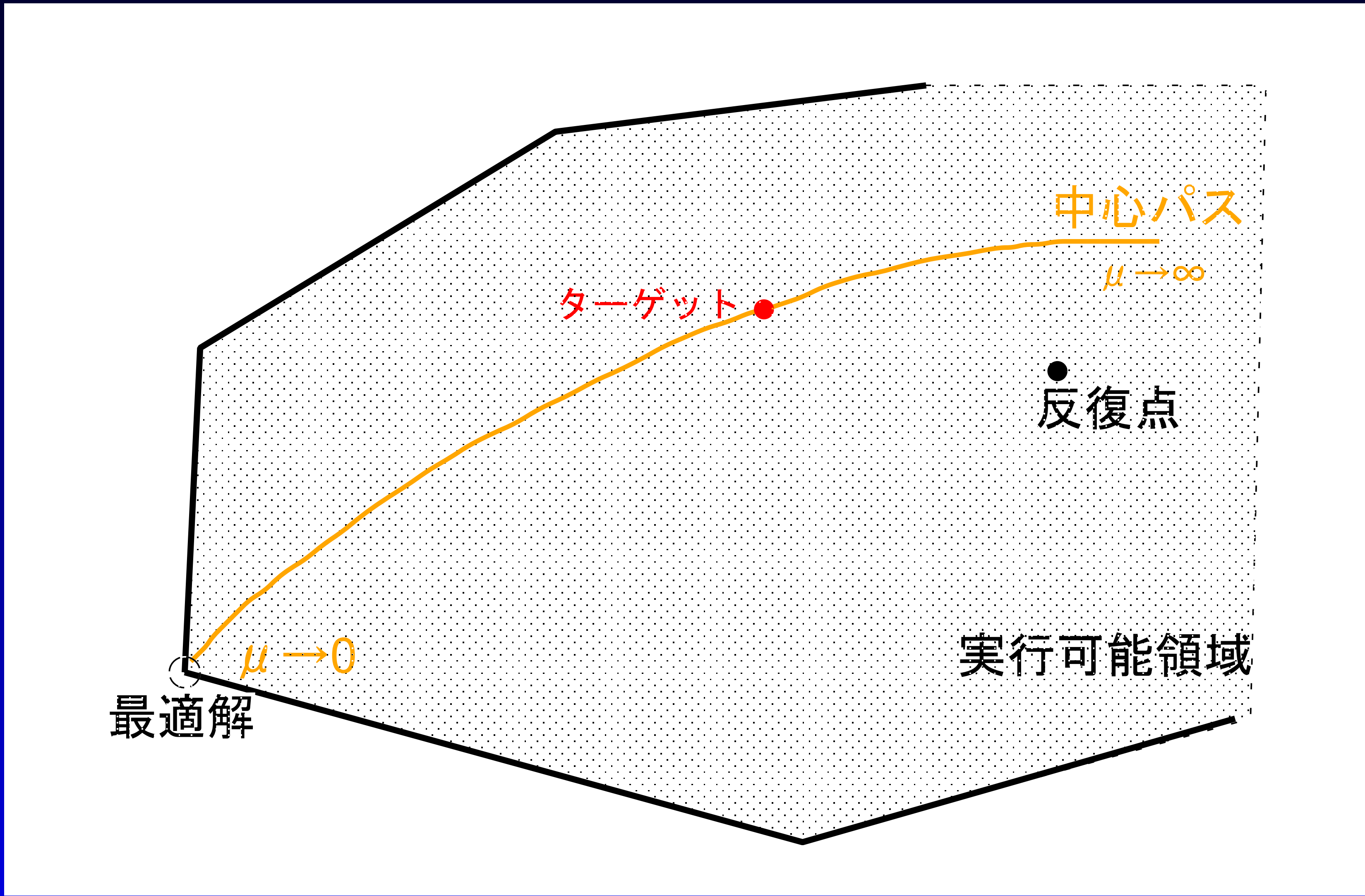
1-(b). 主双対内点法



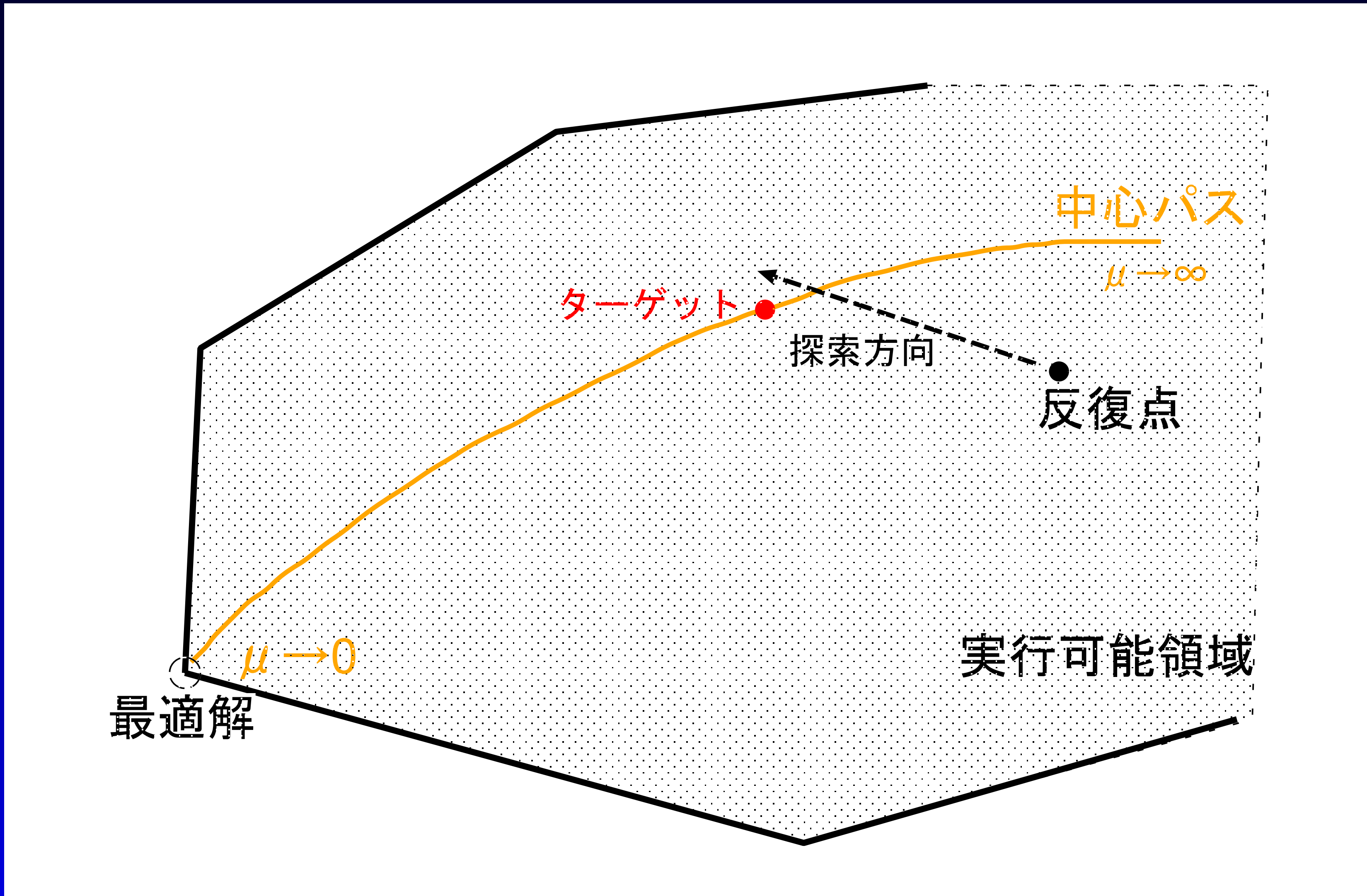
1-(b). 主双対内点法



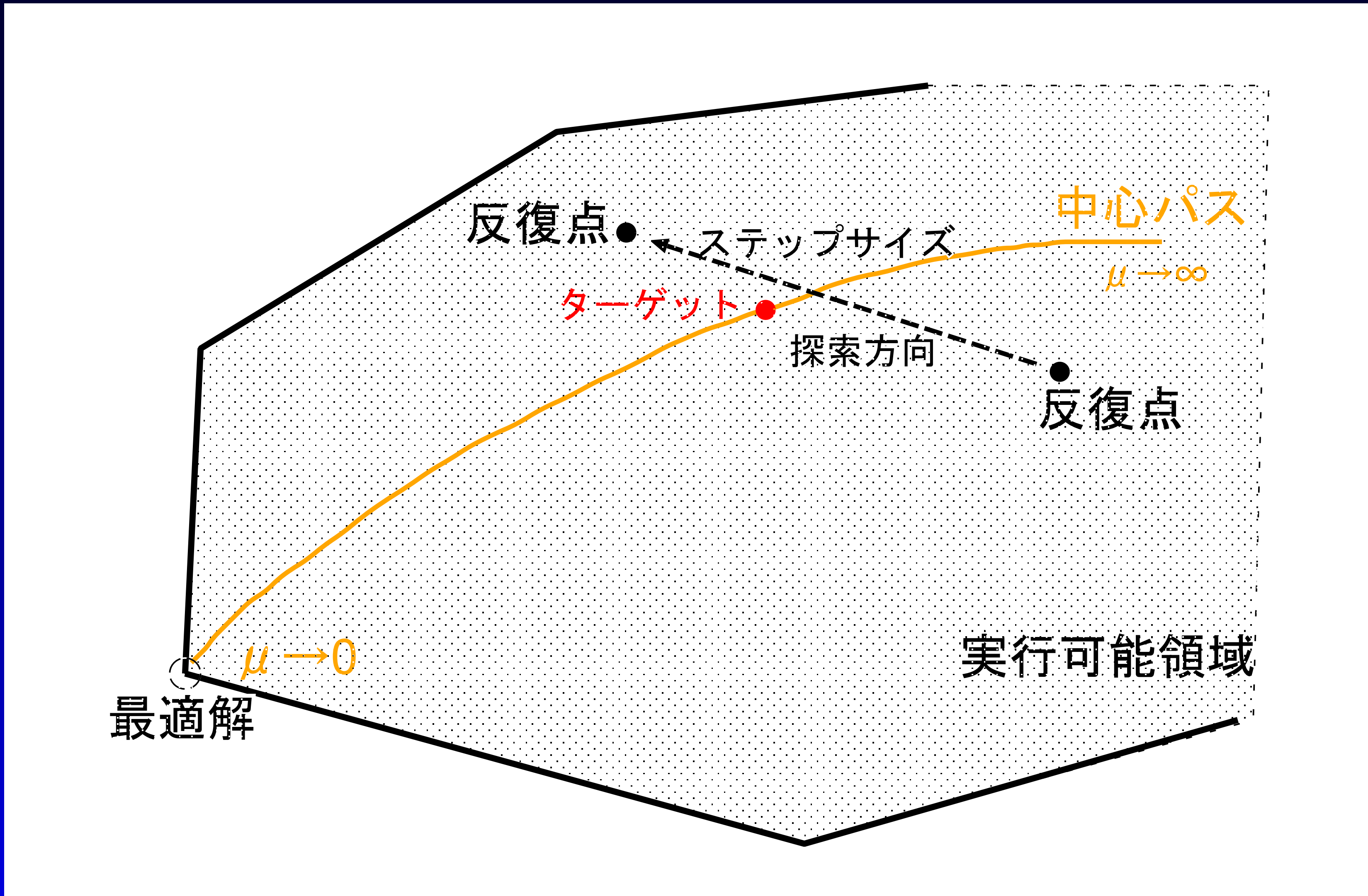
1-(b). 主双対内点法



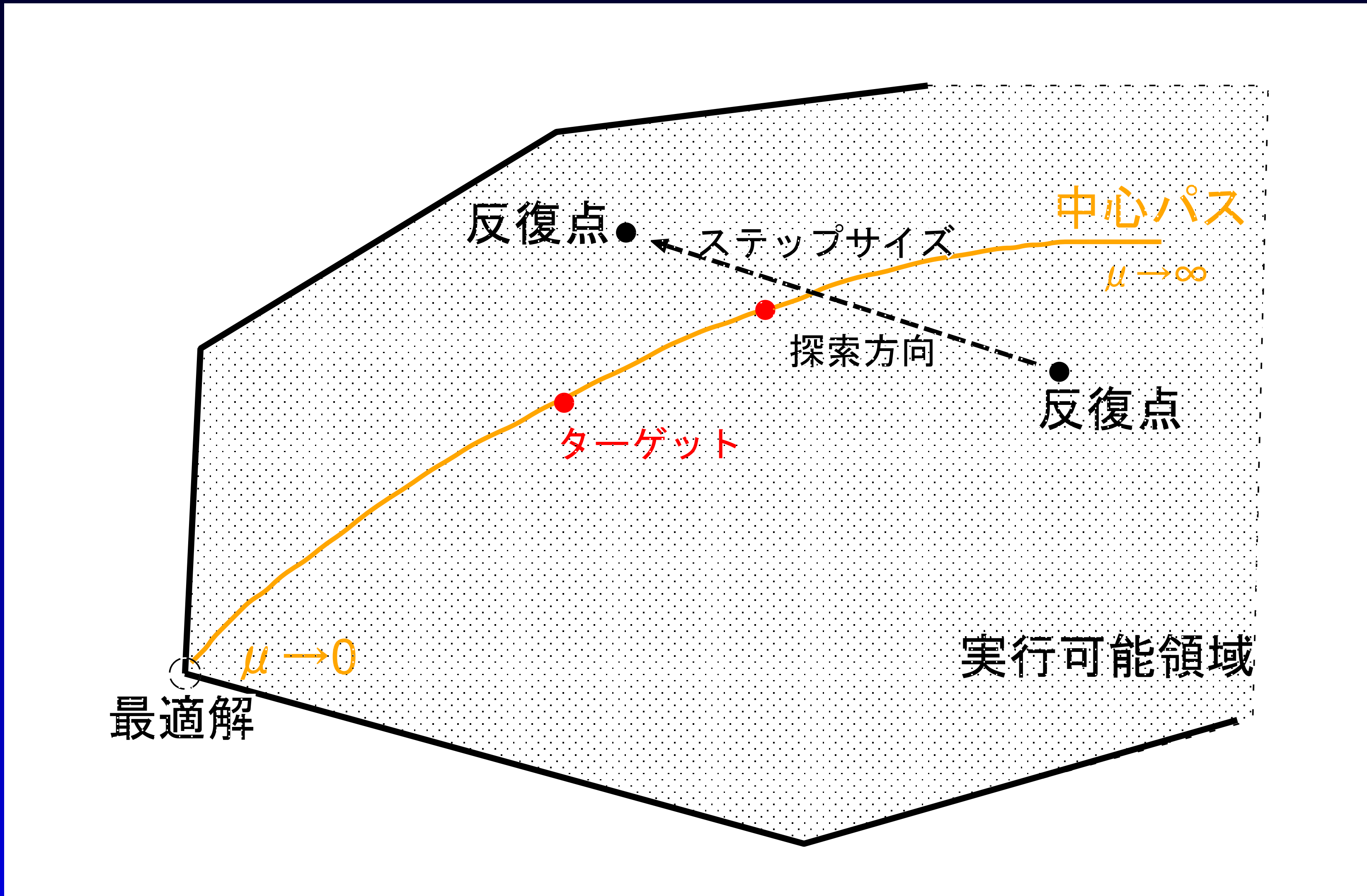
1-(b). 主双対内点法



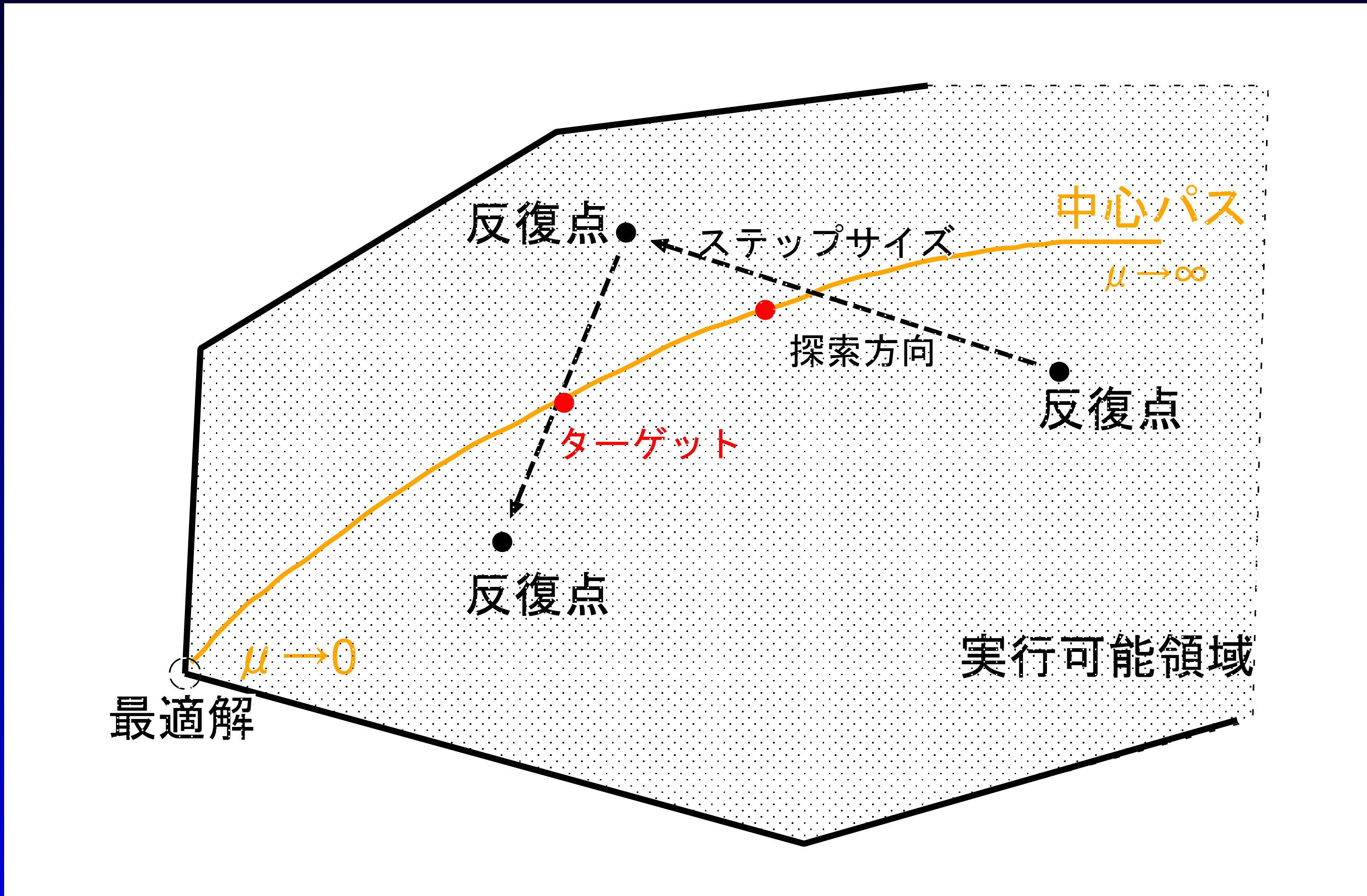
1-(b). 主双対内点法



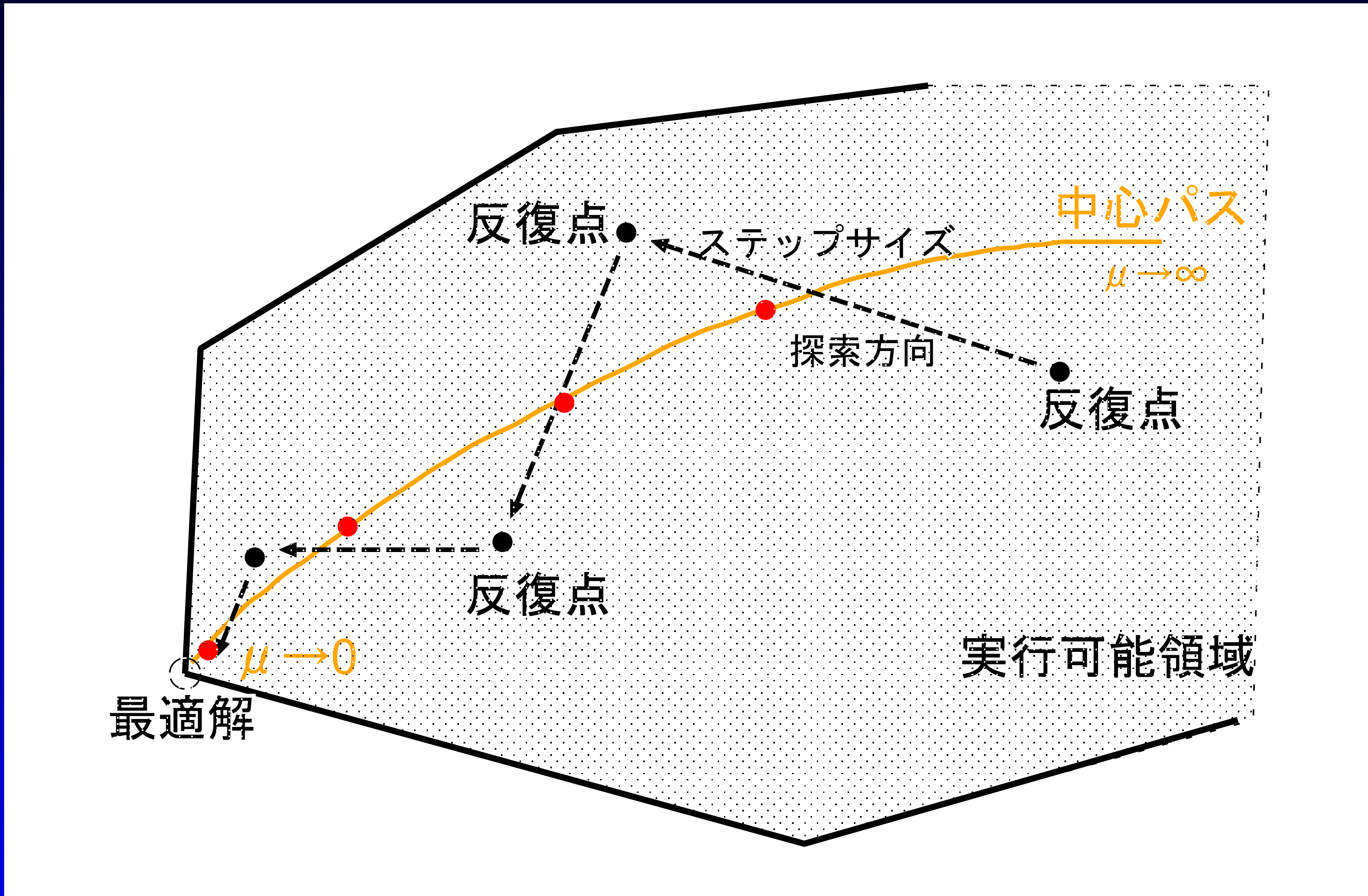
1-(b). 主双対内点法



1-(b). 主双対内点法


中心パス
$\mu \to \infty$
反復点
ステップサイズ
探索方向
反復点
ターゲット
反復点
実行可能領域
$\mu \to 0$
最適解

1-(b). 主双対内点法



Euclid 的 Jordan 代数の行列表現

双線形なので L_x や L_y が存在

- $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{L}_x \boldsymbol{y} = \boldsymbol{L}_y \boldsymbol{x}$

$$\frac{d}{d\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = \frac{d}{d\boldsymbol{x}} \boldsymbol{L}_y \boldsymbol{x} = \boldsymbol{L}_y$$

２次表現

- $\boldsymbol{P}_x \equiv 2\boldsymbol{L}_x^2 - \boldsymbol{L}_{x^2}$
- $\boldsymbol{Q}_{x,y} \equiv \boldsymbol{L}_x \boldsymbol{L}_y + \boldsymbol{L}_y \boldsymbol{L}_x - \boldsymbol{L}_{x \circ y}$

$$\boldsymbol{P}_x^{-1} = \boldsymbol{P}_{x^{-1}} \qquad \boldsymbol{P}_{P_x y} = \boldsymbol{P}_x \boldsymbol{P}_y \boldsymbol{P}_x$$

$$(\boldsymbol{P}_x \boldsymbol{y})^{-1} = \boldsymbol{P}_x^{-1} \boldsymbol{y}^{-1} \qquad \boldsymbol{Q}_{x^2,y} = \boldsymbol{P}_x \boldsymbol{L}_{P_x^{-1} y} \boldsymbol{P}_x$$

探索方向

中心パス上のあるターゲットを表す方程式

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}x - b \\ \mathcal{A}^* y - c - z \\ x \circ z - \mu e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

探索方向

中心パス上のあるターゲットを表す方程式

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \\ \mathcal{A}^*\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c} - \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{z} - \mu\boldsymbol{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Newton 方向

現在の反復点：$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$, **探索方向：**$(d\boldsymbol{x},d\boldsymbol{y},d\boldsymbol{z})$

$$\nabla F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})(d\boldsymbol{x},d\boldsymbol{y},d\boldsymbol{z}) = -F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$

探索方向

中心パス上のあるターゲットを表す方程式

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \\ \mathcal{A}^*\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c} - \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{z} - \mu\boldsymbol{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Newton 方向

現在の反復点：$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, **探索方向：**$(d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{y}, d\boldsymbol{z})$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_p & \quad \equiv \boldsymbol{b} - \mathcal{A}\boldsymbol{x} \\ \mathcal{A}^*d\boldsymbol{y} - d\boldsymbol{z} = \boldsymbol{r}_d & \quad \equiv \boldsymbol{c} - \mathcal{A}^*\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{L}_z d\boldsymbol{x} + \boldsymbol{L}_x d\boldsymbol{z} = \boldsymbol{r}_c & \quad \equiv \mu\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{z} \end{aligned}$$

計算時間の削減

Newton 方程式

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_p &\equiv \boldsymbol{b} - \mathcal{A}\boldsymbol{x} \\
\mathcal{A}^* d\boldsymbol{y} - d\boldsymbol{z} = \boldsymbol{r}_d &\equiv \boldsymbol{c} - \mathcal{A}^*\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \\
\boldsymbol{L}_z d\boldsymbol{x} + \boldsymbol{L}_x d\boldsymbol{z} = \boldsymbol{r}_c &\equiv \mu\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{z}
\end{aligned}
$$

計算時間の削減

Newton 方程式

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_p \qquad & \equiv \boldsymbol{b} - \mathcal{A}\boldsymbol{x} \\
\mathcal{A}^* d\boldsymbol{y} - d\boldsymbol{z} = \boldsymbol{r}_d \qquad & \equiv \boldsymbol{c} - \mathcal{A}^*\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \\
\boldsymbol{L}_z d\boldsymbol{x} + \boldsymbol{L}_x d\boldsymbol{z} = \boldsymbol{r}_c \qquad & \equiv \mu\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{z}
\end{aligned}
$$

コンパクト計算

1. $\boldsymbol{B} := \mathcal{A}\boldsymbol{L}_z^{-1}\boldsymbol{L}_x\mathcal{A}^*$
2. $\boldsymbol{s} := -\boldsymbol{r}_p + \mathcal{A}\boldsymbol{L}_z^{-1}(\boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{L}_x\boldsymbol{r}_d)$
3. **線形方程式** $\boldsymbol{B}d\boldsymbol{y} = \boldsymbol{s}$
4. $d\boldsymbol{z} := \mathcal{A}^* d\boldsymbol{y} - \boldsymbol{r}_d$
5. $d\boldsymbol{x} := \boldsymbol{L}_z^{-1}(\boldsymbol{r}_c - \boldsymbol{L}_x d\boldsymbol{z})$

計算時間の削減

Newton 方程式

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}dx = \boldsymbol{r}_p & \equiv \boldsymbol{b} - \mathcal{A}\boldsymbol{x} \\
\mathcal{A}^* dy - dz = \boldsymbol{r}_d & \equiv \boldsymbol{c} - \mathcal{A}^*\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \\
\boldsymbol{L}_z dx + \boldsymbol{L}_x dz = \boldsymbol{r}_c & \equiv \mu\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{z}
\end{aligned}
$$

コンパクト計算

1. $B := \mathcal{A}\boldsymbol{L}_z^{-1}\boldsymbol{L}_x\mathcal{A}^*$
2. $\boldsymbol{s} := -\boldsymbol{r}_p + \mathcal{A}\boldsymbol{L}_z^{-1}(\boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{L}_x\boldsymbol{r}_d)$
3. **線形方程式** $Bdy = \boldsymbol{s}$
4. $dz := \mathcal{A}^* dy - \boldsymbol{r}_d$
5. $dx := \boldsymbol{L}_z^{-1}(\boldsymbol{r}_c - \boldsymbol{L}_x dz)$

問題点： L_z^{-1} **の計算がボトルネック**

別の探索方向

中心パス上のあるターゲットを表す方程式

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \\ \mathcal{A}^{*}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c} - \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{z} - \mu \boldsymbol{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

別の探索方向

中心パス上のあるターゲットを表す方程式

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}x - b \\ \mathcal{A}^* y - c - z \\ x \circ z - \mu e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$ **方程式の解は同じ**

$$F_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}x - b \\ \mathcal{A}^* y - c - z \\ P_g x \circ P_g^{-1} z - \mu e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$P_g x = 2g \circ (g \circ x) - (g \circ g) \circ x$$

別の探索方向

中心パス上のあるターゲットを表す方程式

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b} \\ \mathcal{A}^*\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{z}-\mu\boldsymbol{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$ **方程式の解は同じ**

$$F_g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b} \\ \mathcal{A}^*\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{P}_g\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{P}_g^{-1}\boldsymbol{z}-\mu\boldsymbol{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

F_g に対する Newton 方向を計算する

別の探索方向

F に対する Newton 方程式

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{A}d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_p \quad &\equiv \boldsymbol{b} - \mathcal{A}\boldsymbol{x} \\ \mathcal{A}^* d\boldsymbol{y} - d\boldsymbol{z} = \boldsymbol{r}_d \quad &\equiv \boldsymbol{c} - \mathcal{A}^*\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{L}_z d\boldsymbol{x} + \boldsymbol{L}_x d\boldsymbol{z} = \boldsymbol{r}_c \quad &\equiv \mu\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{z} \end{aligned}}$$

別の探索方向

F に対する Newton 方程式

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} dx = \boldsymbol{r}_p & \equiv \boldsymbol{b} - \mathcal{A}\boldsymbol{x} \\
\mathcal{A}^* dy - dz = \boldsymbol{r}_d & \equiv \boldsymbol{c} - \mathcal{A}^*\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \\
\boldsymbol{L}_z dx + \boldsymbol{L}_x dz = \boldsymbol{r}_c & \equiv \mu\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{z}
\end{aligned}
$$

$$\Updownarrow$$

F_g に対する Newton 方程式

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} dx = \boldsymbol{r}_p & \equiv \boldsymbol{b} - \mathcal{A}\boldsymbol{x} \\
\mathcal{A}^* dy - dz = \boldsymbol{r}_d & \equiv \boldsymbol{c} - \mathcal{A}^*\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \\
\boldsymbol{L}_{P_g^{-1} z} \boldsymbol{P}_g dx + \boldsymbol{L}_{P_g x} \boldsymbol{P}_g^{-1} dz = \boldsymbol{r}_c & \equiv \mu\boldsymbol{e} - \boldsymbol{P}_g \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{P}_g^{-1} \boldsymbol{z}
\end{aligned}
$$

別の探索方向

コンパクト計算

1. $\boldsymbol{B} := \mathcal{A}\boldsymbol{P}_g^{-1}\boldsymbol{L}_{P_g^{-1}z}^{-1}\boldsymbol{L}_{P_g x}\boldsymbol{P}_g^{-1}\mathcal{A}^*$
2. $\boldsymbol{s} := -\boldsymbol{r}_p + \mathcal{A}\boldsymbol{P}_g^{-1}\boldsymbol{L}_{P_g^{-1}z}^{-1}(\boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{L}_{P_g x}\boldsymbol{P}_g^{-1}\boldsymbol{r}_d)$
3. **線形方程式** $B d\boldsymbol{y} = \boldsymbol{s}$
4. $d\boldsymbol{z} := \mathcal{A}^* d\boldsymbol{y} - \boldsymbol{r}_d$
5. $d\boldsymbol{x} := \boldsymbol{P}_g^{-1}\boldsymbol{L}_{P_g^{-1}z}^{-1}(\boldsymbol{r}_c - \boldsymbol{L}_{P_g x}\boldsymbol{P}_g^{-1}d\boldsymbol{z})$

別の探索方向

コンパクト計算

1. $\boldsymbol{B} := \mathcal{A}\boldsymbol{P}_g^{-1}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{P}_g^{-1}\boldsymbol{z}}^{-1}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{P}_g\boldsymbol{x}}\boldsymbol{P}_g^{-1}\mathcal{A}^*$
2. $\boldsymbol{s} := -\boldsymbol{r}_p + \mathcal{A}\boldsymbol{P}_g^{-1}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{P}_g^{-1}\boldsymbol{z}}^{-1}(\boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{P}_g\boldsymbol{x}}\boldsymbol{P}_g^{-1}\boldsymbol{r}_d)$
3. **線形方程式** $\boldsymbol{B}d\boldsymbol{y} = \boldsymbol{s}$
4. $d\boldsymbol{z} := \mathcal{A}^*d\boldsymbol{y} - \boldsymbol{r}_d$
5. $d\boldsymbol{x} := \boldsymbol{P}_g^{-1}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{P}_g^{-1}\boldsymbol{z}}^{-1}(\boldsymbol{r}_c - \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{P}_g\boldsymbol{x}}\boldsymbol{P}_g^{-1}d\boldsymbol{z})$

▷ $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{P}_g^{-1}\boldsymbol{z}}^{-1}$ が消えるような $g \in \mathcal{K}$ を持ってくると良い

別の探索方向

コンパクト計算

1. $B := \mathcal{A}P_g^{-1}L_{P_g^{-1}z}^{-1}L_{P_gx}P_g^{-1}\mathcal{A}^*$
2. $\boldsymbol{s} := -\boldsymbol{r}_p + \mathcal{A}P_g^{-1}L_{P_g^{-1}z}^{-1}(\boldsymbol{r}_c + L_{P_gx}P_g^{-1}\boldsymbol{r}_d)$
3. **線形方程式** $B\boldsymbol{dy} = \boldsymbol{s}$
4. $\boldsymbol{dz} := \mathcal{A}^*\boldsymbol{dy} - \boldsymbol{r}_d$
5. $\boldsymbol{dx} := P_g^{-1}L_{P_g^{-1}z}^{-1}(\boldsymbol{r}_c - L_{P_gx}P_g^{-1}\boldsymbol{dz})$

- ▷ $L_{P_g^{-1}z}^{-1}$ **が消えるような** $g \in \mathcal{K}$ **を持ってくると良い**
- ▷ HKM **方向では** $g := z^{1/2}$

$$P_g^{-1}L_{P_g^{-1}z}^{-1}L_{P_gx}P_g^{-1} = Q_{x,z^{-1}}$$

- ▷ NT **方向では** $P_g^{-1}z = P_gx$

$$P_g^{-1}L_{P_g^{-1}z}^{-1}L_{P_gx}P_g^{-1} = P_g^{-2}$$

HKM 方向

Newton 方程式

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}dx &= r_p & &\equiv b - \mathcal{A}x \\
\mathcal{A}^* dy - dz &= r_d & &\equiv c - \mathcal{A}^* y + z \\
P_{z^{1/2}} dx + P_{z^{1/2}} Q_{x,z^{-1}} dz &= r_c & &\equiv \mu e - P_{z^{1/2}} x
\end{aligned}
$$

コンパクト計算

1. $B := \mathcal{A} Q_{x,z^{-1}} \mathcal{A}^*$
2. $s := -r_p + \mathcal{A}(P_{z^{1/2}}^{-1} r_c + Q_{x,z^{-1}} r_d)$
3. 線形方程式 $B dy = s$
4. $dz := \mathcal{A}^* dy - r_d$
5. $dx := P_{z^{1/2}}^{-1} r_c - Q_{x,z^{-1}} dz$

ステップサイズ

$\boldsymbol{x} + \alpha d\boldsymbol{x} \in \mathcal{K}$ を満たす最大の α は？

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{x} + \alpha d\boldsymbol{x} \in \mathcal{K} \\
&\iff \quad \boldsymbol{P}_{x^{1/2}}(\boldsymbol{e} + \alpha \boldsymbol{P}_{x^{1/2}}^{-1} d\boldsymbol{x}) \in \mathcal{K} \\
&\iff \quad \boldsymbol{e} + \alpha \boldsymbol{P}_{x^{1/2}}^{-1} d\boldsymbol{x} \in \mathcal{K} \\
&\iff \quad \lambda_k(\boldsymbol{e} + \alpha \boldsymbol{P}_{x^{1/2}}^{-1} d\boldsymbol{x}) \geq 0 \\
&\iff \quad 1 + \alpha \lambda_k(\boldsymbol{P}_{x^{1/2}}^{-1} d\boldsymbol{x}) \geq 0
\end{aligned}
$$

$\lambda := \lambda_{\min}(\boldsymbol{P}_{x^{1/2}}^{-1} d\boldsymbol{x})$ として、 $\alpha = \begin{cases} \dfrac{-1}{\lambda} & (\lambda < 0) \\ \infty & (\lambda \geq 0) \end{cases}$

LP の場合

線形空間	$\Re^n = \{(x_i) \mid x_i \in \Re \ \ (i = 1, 2, \cdots, n)\}$
Euclid 的 Jordan 代数	$(x_i) \circ (y_i) = (x_i y_i)$
単位元 e	$\boldsymbol{e} = (1)$
x の逆元	$(x_i)^{-1} = (1/x_i)$
対称錐	$\mathcal{K} = \{(x_i) \in \Re^n \mid x_i \geq 0\}$ 　非負領域
L_x	$\boldsymbol{L}_{(x_i)} = \mathrm{diag}(x_i)$
P_x	$\boldsymbol{P}_{(x_i)} = \mathrm{diag}(x_i^2)$
$Q_{x,y}$	$\boldsymbol{Q}_{(x_i),(y_i)} = \mathrm{diag}(x_i y_i)$
固有値分解	$(x_i) = \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k$
内積 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$	$\langle (x_i), (y_i) \rangle = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$

SOCP の場合

線形空間 $\Re^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ \boldsymbol{x}_1 \end{pmatrix} \middle| \; x_0 \in \Re, \; \boldsymbol{x}_1 \in \Re^{n-1} \right\}$

Euclid **的** Jordan **代数** $\begin{pmatrix} x_0 \\ \boldsymbol{x}_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_0 \\ \boldsymbol{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 y_0 + \boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{y}_1 \\ x_0 \boldsymbol{y}_1 + y_0 \boldsymbol{x}_1 \end{pmatrix}$

単位元 e $\begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$

x **の逆元** $\dfrac{\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{J}\boldsymbol{x}}$

対称錐 $\mathcal{K} = \{\boldsymbol{x} \mid x_0 \geq \sqrt{\boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_1}\}$ **２次錐領域**

ただし、 $J = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} \end{pmatrix}$

SOCP の場合

$$\boldsymbol{L}_x \qquad \begin{pmatrix} x_0 & \boldsymbol{x}_1^T \\ \boldsymbol{x}_1 & x_0 \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_x \qquad 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T - (\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{J} \boldsymbol{x}) \boldsymbol{J}$$

$$\boldsymbol{Q}_{x,y} \qquad \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T + \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^T - (\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{J} \boldsymbol{y}) \boldsymbol{J}$$

固有値分解

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \boldsymbol{x}_1 \end{pmatrix} = (x_0 + \sqrt{\boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_1}) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\boldsymbol{x}_1}{2\sqrt{\boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_1}} \end{pmatrix} + (x_0 - \sqrt{\boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_1}) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-\boldsymbol{x}_1}{2\sqrt{\boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_1}} \end{pmatrix}$$

内積 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \qquad 2\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$

ただし、 $J = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} \end{pmatrix}$

SDP の場合

線形空間	$\mathcal{S}^n = \{\boldsymbol{X} \in \Re^{n\times n} \mid \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^T\}$
Euclid 的 Jordan 代数	$\boldsymbol{X} \circ \boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Y}\boldsymbol{X})/2$
単位元 e	$\boldsymbol{I}$
x の逆元	$\boldsymbol{X}$ の逆元 $= \boldsymbol{X}^{-1}$
対称錐	$\mathcal{K} = \{\boldsymbol{X} \in \mathcal{S}^n \mid \boldsymbol{X}$ は半正定値 $\}$
L_x	$(\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{I})/2$
P_x	$\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{X}$
$Q_{x,y}$	$(\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Y} \otimes \boldsymbol{X})/2$
固有値分解	$\boldsymbol{X} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \boldsymbol{v}_k \boldsymbol{v}_k^T$
内積 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$	$\sum_{i,j=1}^{n} X_{ij} Y_{ij}$