数理工学第二 中間試験問題

平成 21 年 11 月 27 日 金曜日

注意事項

1. それぞれの問題ごとに 1 枚の答案用紙を使用すること.
2. すべての答案用紙に学籍番号, 氏名, 問題番号を記述すること.
3. 回答は結果だけではなく導出過程も含め要領よく記述すること.
4. 以下の問題において, 内積は $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$ で定義されているとする.

問題 I.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & -7 \\ -2 & 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ -10 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の階数を求めよ.
(2) 行列 A の核 $\ker(A)$ を求めよ.
(3) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ を全て求めよ.

問題 II.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を, この順にグラム・シュミットの直交化の手順により直交化せよ.
(2) $\mathbb{R}^3$ において, ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ が張る平面 (原点を含む) と, 点 $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ との最短距離を求めよ.

問題 III.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有空間を求めよ.
(2) 行列 A を対角化する直交行列 Q と対角行列 D を求めよ.
(3) $\mathbb{R}^3$ において, 部分空間 $(\ker(A))^\perp$ と, 点 $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ との最短距離を求めよ.

問題 IV.

以下の命題が正しいか正しくないか理由をつけて答えよ.

(1) n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して, $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_{n-1} + \boldsymbol{b} = (1, 1, \ldots, 1)^T$ と $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_{n-1} + \boldsymbol{c} = (2, 2, \ldots, 2)^T$ が成り立つとする. このとき, $B = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{b}]$ と $C = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{c}]$ の行列式の絶対値について, $|\det(B)| \le |\det(C)|$ が成立する. (正 or 誤?)
(2) 対称行列 A の行列式 $\det(A)$ が正ならば, A の固有値は全て正である. (正 or 誤?)
(3) V_1, V_2 を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とすると, $V_1 \cup V_2$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である. (正 or 誤?)
(4) $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W に対して, $W \cap (W^\perp) = \{\boldsymbol{0}\}$ が成立する. (正 or 誤?)
(5) A を $A = A^2$, $A = A^T$ を満たす n 次正方行列であるとする.
このとき, 任意の $\boldsymbol{x} \in R(A)$, $\boldsymbol{y} \in (R(A))^\perp$ に対して, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ と $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ が成立する. (正 or 誤?)

数理工学第二 期末試験問題

平成 22 年 2 月 5 日 金曜日

注意事項

1. すべての答案用紙に学籍番号, 氏名, 問題番号を記述すること.
2. 解答は結果だけではなく導出過程も含め要領よく記述すること.

問題 I.

以下の関数 $f(x,y)$ の停留点を全て求めて, それらの点が極値になるかどうかを調べよ. また極値となる点での関数の値を求めよ.

$$f(x,y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3) - 3xy\,, \qquad (x,\, y \in \mathbb{R})$$

問題 II.

以下の微分方程式の初期値問題を解け.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 4x(t) = \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x^{(1)}(0) = 0$$

問題 III.

区間 $(-\pi, \pi]$ 上の関数 $f(x) = |\sin x|$ に対して以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ.

(2) $\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{8^2-1} + \ldots$ の値を求めよ.

問題 IV.

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする. $f(x,y) = 7x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 5y^2$ に対して $f(x,y) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ となるような実対称行列 A を求めよ.

(2) (1) で求めた A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) 以下の積分の値を求めよ.

$$\int_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad , \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 7x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 5y^2 \le 8\}$$

必要なら以下の公式を用いてかまわない.

ラプラス変換表

原関数 $f(t)$	像関数 $F(s)=L(f(t))=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{s}$
t^m	$\frac{m!}{s^{m+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$e^{\alpha t}t^m$	$\frac{m!}{(s-\alpha)^{m+1}}$
$\cos\beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$
$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$

ラプラス変換の微分則　$x(t)$ の n 階導関数のラプラス変換は

$$L\left(\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}(t)\right)=s^nX(s)-s^{n-1}x(0)-s^{n-2}x^{(1)}(0)-\cdots-x^{(n-1)}(0)$$

と表される. ここで, $X(s)$ は $x(t)$ のラプラス変換を表す.
また, $x^{(n)}(\tau)$ は $\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n}$ の $t=\tau$ のときの値を表す.

ラプラス変換と畳み込み　$f(t)$ と $g(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $F(S)$ と $G(S)$ とする. 畳み込み $f*g(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau$ に対して, そのラプラス変換は $L\left(f*g(t)\right)=F(s)G(s)$ となる.

フーリエ級数展開

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx\,,$$
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\,,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

三角関数の公式

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,,\quad \sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,,$$
$$\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\,,$$
$$\cos(\theta_1-\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\,,$$
$$\sin(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2\,,$$
$$\sin(\theta_1-\theta_2)=-\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2$$