数理工学第二 中間試験問題 (改訂版)

平成 22 年 11 月 26 日 金曜日

注意事項

1. それぞれの問題ごとに 1 枚の答案用紙を使用すること.
2. すべての答案用紙に学籍番号, 氏名, 問題番号を記述すること.
3. 回答は結果だけではなく導出過程も含め要領よく記述すること.
4. 以下の問題において, 内積は $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$ で定義されているとする.

問題 I.

α, β を $1+\alpha+\beta=0$ を満たす実数とし, 行列 A とベクトル $\boldsymbol{t}$ を以下のものとする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta & 1 \\ \beta & 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の階数を求めよ.
(2) 行列 A の核 $\ker(A)$ を求めよ.
(3) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を全て求めよ.

問題 II.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を, この順にグラム・シュミットの直交化の手順により直交化せよ.
(2) 行列 $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]$ を QR 分解せよ.
(3) $\mathbb{R}^3$ において, ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ が張る平面 (原点を含む) と, 点 $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$ との最短距離を求めよ.

問題 III.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有空間を求めよ.
(2) 行列 A を対角化する直交行列 Q と対角行列 D を求めよ.
(3) $\mathbb{R}^3$ において, 部分空間 $(\ker(A))^\perp$ と, 点 $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$ との最短距離を求めよ.

問題 IV.

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & O & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & O & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

n 行 n 列の行列 A_n を上の形の行列として定義する. $\det(A_n)$ を求めよ.

数理工学第二 期末試験問題

平成 23 年 2 月 4 日 金曜日

注意事項

1. すべての答案用紙に学籍番号, 氏名, 問題番号を記述すること.
2. 解答は結果だけではなく導出過程も含め要領よく記述すること.

問題 I.

以下の微分方程式の初期値問題を解け.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + 3x(t) = 0, \quad x(0) = 0, \quad x^{(1)}(0) = 1$$

問題 II.

以下の関数 $f(x, y)$ の停留点を全て求めて, それらの点が極値になるかどうかを調べよ.
また極値となる点での関数の値を求めよ.

$$f(x, y) = 2x^3 - y^3 - 3x^2 y + 6y\,, \qquad (x,\, y \in \mathbb{R})$$

問題 III.

区間 $(-\pi, \pi]$ 上の関数 $f(x) = |x|$ に対して以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ.

(2) 以下の等式を示せ.

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots$$

問題 IV.

(1) 以下の等式を計算して示せ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad , \quad (a > 0).$$

また, 上式の両辺を a で微分することにより, $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$ が得られることを示せ. ただし, 微分と積分の順序は入れ替えられるとする.

(2) $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, ($\rho$ は $|\rho| < 1$ を満たす定数) とする. Σ を直交行列を用いて対角化せよ.

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする. 以下の積分の値を計算して求めよ.

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{|\det \Sigma|}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{x}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

必要なら以下の公式を用いてかまわない.

ラプラス変換表

原関数 $f(t)$	像関数 $F(s) = L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{s}$
t^m	$\frac{m!}{s^{m+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$e^{\alpha t} t^m$	$\frac{m!}{(s-\alpha)^{m+1}}$
$\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$

ラプラス変換の微分則　　$x(t)$ の n 階導関数のラプラス変換は

$$L\left(\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}(t)\right) = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x^{(1)}(0) - \cdots - x^{(n-1)}(0)$$

と表される. ここで, $X(s)$ は $x(t)$ のラプラス変換を表す.
また, $x^{(n)}(\tau)$ は $\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n}$ の $t = \tau$ のときの値を表す.

フーリエ級数展開

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\,,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\,,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$