

## 数理工学第一 期末試験

- ・試験時間は90分とする.
- ・すべての答案用紙に学籍番号, 氏名, 問題番号を必ず記入すること.
- ・答えは結果のみではなく, 導出過程も要領よく記すこと. ただし, 解答に不要な記述は減点の対象とする.

### 問題 1

- (1) 自然数全体の集合  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  と非負整数全体の集合  $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  が対等であることを示せ.
- (2) 开区間の集合  $\mathcal{T}$  があって,  $\mathcal{T}$  に属するどの2つの开区間も互いに素であるとする. このとき,  $\mathcal{T}$  はたかだか可算な集合であることを示せ.

### 問題 2

- (1) 半开区間  $A = (0, 1] \subset \mathbb{R}$  が開集合でないことを示せ.
- (2) 任意の集合  $M$  の内部  $M^i$  は開集合であることを示せ.

### 問題 3

- (1) 関数  $d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $d_1(x, y) = (x^3 - y^3)^2$  とするとき,  $d_1$  が実数全体の集合  $\mathbb{R}$  上の距離関数であるかどうかを示せ.
- (2)  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  を距離空間とし, 関数  $d_2 : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

とするとき,  $d_2$  が直積集合  $X \times Y$  上の距離関数であることを示せ.

### 問題 4

- (1) 任意のレベル集合が凸集合であるが, 凸関数とならない関数  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  の具体例を一つあげよ.
- (2) (1) で示した関数  $f$  が凸関数でないことを示せ.
- (3) (1) で示した関数  $f$  の任意のレベル集合が凸集合であることを示せ.