2007.02.13

2006 年度確率モデル期末試験問題

・テキスト，プリント，ノート、選択持込可能.

・解答は結果だけでなく，導出経過を要領よく記述すること.

１． ２つの確率変数 X と Y が独立にいずれも区間(0，1)の一様分布にしたがうとする．このとき

$$U=\sqrt{-2\log X}\cos(2\pi Y),\quad V=\sqrt{-2\log X}\sin(2\pi Y)$$

という変換で得られる U と V の同時密度関数を求めよ.

２． 確率変数 X と Y は２次元正規分布にしたがい，そのパラメータは

$\mu_x=60$，$\mu_y=65$，$\sigma_x=6$，$\sigma_y=8$，$\rho=0.72$

である．このとき，X が Y より大きい確率 $P\{X\geqq Y\}$ を求めよ.

（ヒント：テキスト p.25，(2.7)式，(2.8)式を使う.）

３． ３つの確率変数 X, Y, Z はたがいに独立に区間(0，1)の一様分布にしたがっている.

1) $\max\{X, Y\}$ の確率密度関数を求めよ.

2) $\max\{X, Y\}+Z$ の確率密度関数を求めよ.

４． ３つの白玉と３つの黒玉が２つの箱に３つずつ分かれて入っている．１回の交換においては，各箱からランダムに１つの玉を取り出し，それぞれをもとと違う箱に入れる．時点ｎで，箱１に入っている白玉の数を X_n とする．連続する２時点の間で１回の交換を行う．$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ の推移をマルコフ連鎖として表現し，X_n の定常分布を求めよ.

2006年度「確率モデル」期末試験問題基準解答

１．　この問題は演習でやったので，既に解説済みだが簡単に述べる．

まず，逆関数を求めると

$$u^2+v^2=-\log x \quad より \quad x=\exp\left\{-\frac{u^2+v^2}{2}\right\}$$

$$\frac{v}{u}=\tan(2\pi y) \quad より \quad y=\frac{1}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$$

これより，ヤコビアンは

$$J=\begin{vmatrix}\partial x/\partial u & \partial x/\partial v\\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v\end{vmatrix}=-\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{u^2+v^2}{2}\right\}$$

$f_{X,Y}(x,y)=1$　$(0\leqq x\leqq 1\ ;\ 0\leqq y\leqq 1)$,

　　　　$=0$（その他のとき）　だから

$$f_{U,V}(u,v)=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{u^2+v^2}{2}\right\}$$

２．　$P\{X\geqq Y\}=P\{X-Y\geqq 0\}$である．

$\mathrm{E}\{X-Y\}=\mathrm{E}\{X\}-\mathrm{E}\{Y\}=-5$

$\mathrm{V}(X-Y)=\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)-2\mathrm{Cov}(X,Y)=30.88$

よって，正規分布表より $P\{X-Y\geqq 0\}=0.184$

３．　1)　$T=\max\{X,Y\}$の確率密度関数

$F_T(t)=F_X(t)\,F_Y(t)=t^2$

$f_T(t)=2t$　$(0\leqq t\leqq 1)$

　　$=0$　（その他）

2)　$U=\max\{X,Y\}+Z$の確率密度関数

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f_T(t)\,f_Z(u-t)\,dt$$

$$=\int_0^u 2t\,dt=u^2 \quad (0\leqq u\leqq 1)$$

$$=\int_{u-1}^{1} 2t\,dt = u(2-u) \quad (1 \leqq u \leqq 2)$$

$$=0 \quad （その他）$$

４．　この問題は過去問と同じなので，解答は既に公開済みなので結果のみ述べる．

状態空間は $S=\{0,1,2,3\}$

推移確率行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

定常分布は $\left(\frac{1}{20},\frac{9}{20},\frac{9}{20},\frac{1}{20}\right)$