確率モデル期末試験

2006.2.14

解答は結果のみでなく，導出過程も要領よく記述すること．

テキスト，プリント，ノート，レポート，電卓持込み可．

1.　確率変数 X と Y は独立でいずれもパラメータ λ の指数分布にしたがう．

1) $\min(X,Y)$ の確率密度関数を求め，その平均を求めよ．

2) $X+Y$ の確率密度関数を求め，その平均を求めよ．

2.　確率変数 X と Y は独立でそれぞれ平均 λ, μ のポアソン分布にしたがう．$X+Y=Z$ を与えたときの X の条件付き確率関数を求めよ．

3.　ある地域での昨年 12 月の降雪量は平年の５倍であったという．平年の５倍の降雪量を観測する確率の上限を求めよ．

4.　当該事象の発生間隔 $T_1, T_2, \cdots$ がたがいに独立に区間（0，1）の一様分布にしたがう再生過程を考える．このときの再生関数 $m(t)=E[N(t)]$ が

$$m(t)=e^t-1$$

で与えられることを示せ．ただし，$t<1$ とする．

5.　推移確率行列が次のようなマルコフ連鎖がある．

$$P=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

1) $P\{X_{n+2}=3 | X_n=1\}$ を求めよ．

2) ３つの状態の定常分布を求めよ．

（解答例）

1.　1)　S＝min(X, Y ）とおくと，Sの分布関数は

$$F_S(s) = 1 - (1 - F_X(s))(1 - F_Y(s))$$
$$= 1 - \exp(-2\lambda s)$$

となるから、これを微分した

$$f_S(s) = 2\lambda \exp(-2\lambda s)$$

が確率密度関数である．すなわちパラメータが 2λの指数分布である．
よって平均は，1／(2λ)である．

2)　T＝X＋Y の確率密度関数はたたみこみにより

$$f_T(t) = \int_0^t f_X(x) f_Y(t-x)\,dx$$

$$= \int_0^t \lambda \exp(-\lambda x) \lambda \exp(-\lambda(t-x))\,dx = \lambda^2 t \exp(-\lambda t)$$

と求まる．平均は E[T]=E[X]+E[Y]より 2／λである．

2.　　まず、X＋Y ＝Zの確率関数をたたみこみで求めると

$$p_Z(z) = \sum_{x=0}^{z} p_X(x) p_Y(z-x)$$

$$= \sum_{x=0}^{z} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!} e^{-\mu}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!} \sum_{x=0}^{z} \frac{z!}{x!(z-x)!} \lambda^x \mu^{z-x} = \frac{(\lambda+\mu)^z}{z!} e^{-(\lambda+\mu)}$$

となり，平均$(\lambda+\mu)$のポアソン分布であることがわかる．

次に題意の条件付き分布を求めると

$$p(x|z) = \frac{p(x,z)}{p(z)} = \frac{P\{X = x, Z = z\}}{p(z)} = \frac{P\{X = x, Y = z-x\}}{p(z)}$$

$$= \frac{P\{X = x\} P\{Y = z-x\}}{p(z)}$$

$$= \frac{\dfrac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}\dfrac{\mu^{z-x}}{(z-x)!}e^{-\mu}}{\dfrac{(\lambda+\mu)^z}{z!}e^{-(\lambda+\mu)}} = \frac{z!}{x!(z-x)!}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{z-x}$$

となり，２項分布であることがわかる．

3.　　マルコフの不等式

$$P\{X \geq kE[X]\} \leq \frac{1}{k}$$

に代入すれば，k＝5 であるから上限値は 1／5 である．

等号の成立する例として，0 に確率 4／5，正の値 a に確率 1／5 の２点分布を考えると，平均が a／5 となるから等号成立の分布は存在することがわかる．

4.　再生関数 $m(t) = E[N(t)]$ に対する再生方程式は，$t < 1$ であることから

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x) f(x)\, dx$$

$$= t + \int_0^t m(t-x)\, dx = t + \int_0^t m(y)\, dy$$

となる．ここで両辺を微分すれば

$$m'(t) = 1 + m(t)$$

という１階の線形微分方程式を得る．これを初期条件 $m(0) = 0$ のもとで解けば，題意の $m(t) = e^t - 1$ を得る．

5.

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

1)　$P\{X_{n+2} = 3 | X_n = 1\}$ を求めよ．

1→1→3，1→2→3，1→3→3 という３つの経路がある．各経路の推移確率はそれぞれ0.2×0.3＝0.06, 0.5×0.1＝0.05, 0.3×0.6＝0.18となる．

よってこれらの和 0.29 が答えである．

2)　$0.2\pi_1+0.5\pi_2+0.3\pi_3=\pi_1$

$0.5\pi_1+0.4\pi_2+0.1\pi_3=\pi_2$

$0.3\pi_1+0.1\pi_2+0.6\pi_3=\pi_3$

$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$

を解いて，$\pi_1=\pi_2=\pi_3=1/3$ となる．本問のように推移確率行列が対称行列ならば，行和だけでなく列和も 1 であるため，常に

$$\pi_1=\pi_2=\pi_3=1/3$$

となる（固有値 1 に対する固有ベクトルがこれである）．