確率モデル期末試験　2003.2.13

解答は結果のみでなく、導出過程も要領よく記述すること

1. XとYは２次元正規分布にしたがい、そのパラメータは

$$\mu_x=50,\quad \mu_y=60,\quad \sigma_x=3,\quad \sigma_y=4,\quad \rho=0.8$$

である。

(1) $P\{Y>65 \mid X=53\}$を求めよ。

(2) $P\{X+Y>120\}$を求めよ。

2. ベルヌーイ試行で初めて成功するまでの試行数の分布を**幾何分布**という（テキスト p.21 の問 1.2 を見よ）。XとYが独立に幾何分布にしたがうとき、$X+Y$の確率関数をたたみ込みで求めよ。

3. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ はたがいに独立に区間(0, 1)の一様分布にしたがう。これらの最小値を $S=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$とする。

(1) Sの確率密度関数を求めよ。

(2) Sの期待値を求めよ。

4. Xはパラメータλの指数分布にしたがっている。ある非負の実数tに対して、条件付き期待値$E[X \mid X>t]$を求めよ。

5. 推移確率行列が次のようなマルコフ連鎖がある。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $P\{X_{n+2}=3 \mid X_n=1\}$を求めよ。

(2) ３つの状態での定常分布を求めよ。

（略解）

1．(1)　X＝53 を与えたときの、Yの条件付き分布は正規分布で

平均は　$\mu_y + \rho\sigma_y(x-\mu_x)/\sigma_x$ ＝60＋0.8×４×(53－50)／3＝63.2

分散は　$(1-\rho^2){\sigma_y}^2$＝（1－0.64）×16＝5.76

だから、この分布でＹ＞65 となる確率は

（65－63.2）／√5.76＝0.75

と基準化すれば正規分布表より、0.2266 と求められる。

(2)　X＋Yの分布は正規分布で

平均は μ_x＋μ_y＝110、分散は ${\sigma_x}^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y + {\sigma_y}^2$＝9＋2×9.6＋16＝44.2

だから、この分布でX＋Y＞120 となる確率は

(120－110)／√44.2＝1.504

と基準化すれば正規分布表より、0.0668 と求められる。

2．　XとYが同一の幾何分布に独立にしたがっている場合は

$$p_{X+Y}(t) = \sum_{x=1}^{t-1}(1-p)^{x-1}p(1-p)^{t-x-1}p$$

$$= (t-1)(1-p)^{t-2}p^2$$

となり、負の２項分布（２回成功するまでの試行数の分布）になる。

XとYは独立だが、異なる幾何分布にしたがう場合は

$$p_{X+Y}(t) = \sum_{x=1}^{t-1}(1-p)^{x-1}p(1-q)^{t-x-1}q$$

$$= pq(1-q)^{t-2}\sum_{x=1}^{t-1}\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{x-1} = \frac{pq}{p-q}\left((1-q)^{t-1}-(1-p)^{t-1}\right)$$

3．　個々のXの分布関数は $F(x)=x \quad (0\le x\le 1)$ だから

(1)　最小値Sの分布関数は、テキストの式(2.24)より

$F_S(s) = 1-(1-s)^n$　であり、これを微分すれば

$f_S(s) = n(1-s)^{n-1}$

(2)　$E[S] = \int_0^1 (1-s)^n ds = \dfrac{1}{n+1}$　　テキスト p.9 の計算法を利用

４．　テキスト p.17 の応用により

$$P\{X-t>s|X>t\}=\frac{P\{X>t+s\}}{P\{X>t\}}=\frac{\exp[-\lambda(t+s)]}{\exp[-\lambda t]}=\exp[-\lambda s]$$

よって、$X>t$ のもとでの $X-t$ の分布は、また指数分布である。これより

$$E[X|X>t]=t+1/\lambda$$

５．(1)　状態１から２ステップで状態３へ推移する経路は

状態１　→　状態２　→　状態３

のみである。この経路の確率は 1×1／4＝1／4 である。

(2)　定常分布は

$$\pi_1=(3/4)\pi_2+\pi_3$$

$$\pi_2=\pi_1$$

$$\pi_3=(1/4)\pi_2$$

$$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$$

を解いて

(4／9，4／9，1／9)

となる。