確率モデル期末試験　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2005.2.17

解答は結果のみでなく、導出過程も要領よく記述すること。
テキスト、プリント、ノート、レポート、電卓持込み可。

1.　男子学生の体重の分布を平均 60kg，標準偏差 8kg の正規分布とし、女子学生のそれを平均 50kg，標準偏差 6kg の正規分布とする。男子学生３人と女子学生２人がエレベータに乗り合わせた。このエレベータは積載重量が 300kg 以上になるとブザーが鳴るという。このときブザーが鳴る確率を求めよ。

2.　確率変数 X はパラメータ λ の指数分布にしたがい、Y はパラメータ μ の指数分布にしたがい、X と Y は独立とする。このとき、X の Y の最大値 $\max(X,Y)$ の期待値を次の２通りで求めよ。

1) まず、$\max(X,Y)$ の分布関数を求め、これから確率密度関数を求め、これによって積分するという正攻法
2) $\max(X,Y)=X+Y-\min(X,Y)$ という恒等式と、$\min(X,Y)$がパラメータ $\lambda+\mu$ の指数分布にしたがう事実（テキスト p.36、例 2.5）を利用する

3.　ベルヌーイ試行で初めて成功するまでの試行回数の分布は幾何分布である（テキスト p.21 参照）。Xと Yが独立に同一の幾何分布にしたがうとき、$X+Y$の確率分布を求めよ。

4.　ある個人商店での１週間の売り上げは、過去の実績から平均 100 万円、標準偏差は 8 万円であることがわかっている（ただし、分布形は未知）。このとき、ある週間の売り上げが 80 万円から 120 万円の範囲に入る確率の下限値を求めよ。

5.　推移確率行列が次のようなマルコフ連鎖がある。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1)　$P\{X_{n+2}=3 | X_n=1\}$を求めよ。

(2)　３つの状態での定常分布を求めよ。

（略解）

１．　男子学生の体重をX、女子学生のそれをYと記したとき、５人の体重の和は

$$T = X_1 + X_2 + X_3 + Y_1 + Y_2$$

とモデル化される（3X＋2Yでないことに注意）。Tの平均と分散はそれぞれ

E[T]＝3×60＋2×50＝280

V(T)＝3×64＋2×36＝264

である。これより題意である確率 P{T≧300}は

$$\frac{300-280}{\sqrt{264}} = 1.23$$

と基準化し、正規分布表より 0.109 と読み取れる。

２．　T＝max(X, Y)とする。

1) $F_T(t) = F_X(t)F_Y(t) = 1 - e^{-\lambda t} - e^{-\mu t} + e^{-(\lambda+\mu)t}$

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} + \mu e^{-\mu t} - (\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$E[T] = \int_0^\infty t\ f_T(t) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda+\mu}$$

2) E[max(X, Y)]＝E[X＋Y－min(X, Y)]

＝E[X]＋E[Y]－E[min(X, Y)]＝$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda+\mu}$

３．　XとYが同一の幾何分布に独立にしたがっているので

$$p_{X+Y}(t) = \sum_{x=1}^{t-1}(1-p)^{x-1}p(1-p)^{t-x-1}p$$

$$= (t-1)(1-p)^{t-2}p^2$$

となり、負の２項分布（２回成功するまでの試行数の分布）になる。

４．　１週間の売り上げをXとすると、チェビシェフの不等式より

$$P\{|X-100| > 20\} \le \frac{64}{400} = 0.16$$

である。よって求める確率の下限値は 0.84 である。

５．(1)　状態１から２ステップで状態３へ推移する経路は

状態１　→　状態２　→　状態３

のみである。この経路の確率は 1×1／4＝1／4 である。

(2)　定常分布は

$$\pi_1 = (3/4)\pi_2 + \pi_3$$
$$\pi_2 = \pi_1$$
$$\pi_3 = (1/4)\pi_2$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

を解いて

(4／9，4／9，1／9)

となる。