平成 15 年度確率モデル期末試験問題

解答は，結果だけでなく，導出過程も要領よく記述すること．

１．　ある鎖はｎ個のリングからなっている．個々のリングの強度はたがいに独立に同一のワイブル分布（テキスト p.21，問 1.4 を参照）

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m\right]$$

にしたがっている．このとき鎖の強度分布を求めよ．

２．　３つの確率変数 X，Y，Z はたがいに独立に区間(0，1)の一様分布にしたがう．

1)　$X+Y$ の確率密度関数をたたみ込みで求めよ．

2)　$X+Y+Z$ の確率密度関数をたたみこみで求めよ．

３．　ある資格試験は２科目からなり，これらの成績 X と Y は２次元正規分布にしたがい，そのパラメータは

$$\mu_x = 60,\ \mu_y = 70,\ \sigma_x = 6,\ \sigma_y = 8,\ \rho = 0.72$$

であるとする．

1)　$P\{Y > 75 \mid X = 70\}$ を求めよ．

2)　$P\{X + Y > 140\}$ を求めよ．

４．　３つの白玉と３つの黒玉が２つの箱に３つずつ分かれて入っている．1 回の交換においては，各箱からランダムに１つの玉を取り出し，それぞれをもとと違う箱に入れる．時点ｎで，箱１に入っている白玉の数を X_n とする．連続する２時点の間で１回の交換を行う．$\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$ の推移をマルコフ連鎖として表現し，X_n の定常分布を求めよ．

略解

１．　鎖の強度はｎ個のリングの強度における最小値としてモデル化できるので，その分布関数は

$$F_S(x) = 1 - \left[1 - F(x)\right]^n$$

$$= 1 - \left[\exp\left\{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m\right\}\right]^n = 1 - \exp\left\{-n\left(\frac{x}{\eta}\right)^m\right\}$$

で与えられる．

２．

1) $X + Y = T$の確率密度関数は

$0 \leqq t \leqq 1$ のとき　$f_{X+Y}(t) = \int_0^t 1\,dx = t$

$1 \leqq t \leqq 2$ のとき　$f_{X+Y}(t) = \int_{t-1}^1 1\,dx = 2 - t$

2) $X + Y + Z = S$の確率密度関数は

$0 \leqq s \leqq 1$ のとき，$0 \leqq t \leqq s \leqq 1$ なので

$$f_{X+Y+Z}(s) = \int_0^s t\,dt = \frac{1}{2}s^2$$

$1 \leqq s \leqq 2$ のとき，$s - 1 \leqq t \leqq 1$ と $1 \leqq t \leqq s$ で場合分けして

$$f_{X+Y+Z}(s) = \int_{s-1}^1 t\,dt + \int_1^s (2 - t)\,dt = -t^2 + 3t - \frac{3}{2}$$

$2 \leqq s \leqq 3$ のとき，$s - 1 \leqq t \leqq 2$ なので

$$f_{X+Y+Z}(s) = \int_{s-1}^2 (2 - t)\,dt = \frac{1}{2}t^2 - 3t + \frac{9}{2}$$

３．

1) 平均は　70＋0.72×8×(70－60)／6＝79.6

分散は　$(1－0.72^2)$×64＝30.82

$$u=\frac{75-79.6}{\sqrt{30.82}}=-0.829$$ より求める確率は 0.797

2) 平均は　60＋70＝130

分散は　36＋2×0.72×6×８＋64＝169.12

$$u=\frac{140-130}{\sqrt{169.12}}=0.769$$ より求める確率は 0.224

４．　推移確率行列は

0	1	0	0
1/9	4/9	4/9	0
0	4/9	4/9	1/9
0	0	1	0

である．

定常方程式

$$\pi_1=\frac{1}{9}\pi_2$$

$$\pi_2=\pi_1+\frac{4}{9}\pi_2+\frac{4}{9}\pi_3$$

$$\pi_3=\frac{4}{9}\pi_2+\frac{4}{9}\pi_3+\pi_4$$

$$\pi_4=\frac{1}{9}\pi_3$$

を全確率の制約

$$\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1$$

のもとで解けば

$$\pi_1=\frac{1}{20},\quad \pi_2=\frac{9}{20},\quad \pi_3=\frac{9}{20},\quad \pi_4=\frac{1}{20}$$

を得る．