

2004 年度「統計工学」中間試験問題

1. 2 母数指数分布という分布の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\theta} \exp\left[-\frac{x-\mu}{\theta}\right], \quad x \geq \mu$$

で与えられる。ここに $\mu > 0, \theta > 0$ である。通常の指数分布が μ だけ右にシフトした分布である。 X_1, X_2, \dots, X_n がたがいに独立にこの分布にしたがうとき、 μ と θ の最尤推定量を求めよ。

2. 回帰モデル $y = \alpha + \beta x + \varepsilon$ を想定し、 n 組の観測値 $(y_i, x_i) (i=1, 2, \dots, n)$ を採取し、最小 2 乗推定値 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ を算出した。これより、予測値を $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i$ とし、残差を $e_i = y_i - \hat{y}_i$ とする。

- 1) $\sum_{i=1}^n e_i = 0$ となることを示せ。
- 2) $\sum_{i=1}^n e_i(x_i - \bar{x}) = 0$ となることを示せ。

3. ベルヌーイ試行で、 k 回成功するまでの試行回数 X の分布は、負の 2 項分布と呼ばれる。 X を観測したとき、成功確率 p に対する推定量

$$\hat{p} = \frac{k-1}{X-1}$$

は不偏推定量であることを示せ。

4. 高校生を対象にした比較的大規模な模擬試験で数学 A (100 点満点) の得点分布に興味がある。受験番号より無作為に抽出した 10 名の得点は

75, 68, 83, 90, 65, 77, 62, 80, 72, 78

であった。この得点分布に正規分布を仮定して、母平均に対する信頼係数 0.95 の信頼区間を求めよ。